Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Кафедра автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-
інтегрованих технологій

04-03-261М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до навчально-технологічної практики
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за
освітньо-професійними
програмами «Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка» та «Smart-енергетика та електромобільність»
спеціальності 144 «Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка» усіх форм навчання

Рекомендовано науково-методичною
радою з якості ННІАКОТ
Протокол № 1 від 08.10.2020 р.

Рівне – 2020

Методичні вказівки до навчально-технологічної практики для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» та «Smart-енергетика та електромобільність» спеціальності 144 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» усіх форм навчання [Електронне видання] / Кулик Н. І., Аврука І. С. – Рівне : НУВГП, 2020. – 112 с.

Укладачі: Кулик Н. І., кандидат технічних наук, доцент кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій;
Аврука І. С., старший викладач кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій.

Відповідальний за випуск: Древецький В. В., доктор техн. наук, професор, завідувач кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій.

Керівник освітньої програми
«Електроенергетика, електротехніка
та електромеханіка» Василець С. В.

Керівник освітньої програми
«Smart-енергетика та
Електромобільність» Давиденко В. А.

ВСТУП

Дисципліна «Навчально-технологічна практика» відноситься до дисциплін професійної підготовки.

Метою навчальної практики є ознайомлення студентів зі специфікою майбутньої спеціальності, отримання первинних професійних умінь і навичок із загально-професійних і спеціальних дисциплін, в окремих випадках – опанування робітничої професії з масових спеціальностей відповідної галузі.

Навчальна практика – заключний етап навчання студентів на другому курсі, її завданнями є: – систематизація, закріплення і розширення теоретичних і практичних навичок, набутих студентами у процесі вивчення теоретичного матеріалу під час виконання лабораторних і практичних робіт з навчальних курсів «Теоретичні основи електротехніки», «Інформатика та комп'ютерна техніка», «Вища математика», «Числові методи», уміння застосовувати ці знання та навички для розв’язання конкретних задач, уміння працювати у віртуальній лабораторії навчальних аудиторій.

Під час вивчення даної дисципліни студенти здобудуть знання, які допоможуть застосовувати сучасні розробки в галузі проектування електричних мереж та електротехнічного обладнання, що застосовуються в промисловій сфері України.

Вимоги до знань та умінь визначаються галузевими стандартами вищої освіти України та освітньо-професійними програмами [5,6].

ЗМІСТ

ЗМІСТ ЗВІТУ

Письмовий звіт є основним документом, що пред'являється студентом під час здачі заліку. Готується звіт кожним студентом індивідуально на базі матеріалів практики. Звіт викладається у формі пояснювальної записки. До складу звіту можуть входити креслення, графіки, схеми, таблиці, ескізи та інші матеріали, що повинні висвітлювати виконання програми практики та індивідуальних завдань. Приблизний обсяг звіту 20-25 сторінок рукописного тексту. Перелік основних розділів для послідовного викладення матеріалів звіту:

- зміст;
- основні теоретичні відомості;
- індивідуальне завдання;
- висновки;
- список літератури.

Завдання №1

Тема: «Основи роботи в системі Mathematica ».

Мета роботи: ознайомитися з роботою програмного середовища.

1. Теоретичні відомості

Mathematica 9.0 є однією з універсальних математичних систем, яка дає можливість вирішувати велику кількість складних завдань. Сильною стороною системи, вигідно відрізняючи її від інших, є дво- і тривимірна графіка, що використовується для візуалізації кривих і поверхонь у тривимірному просторі. Система інтерактивна (тобто працює в режимі постійного діалогу з користувачем). Вона гнучка й універсальна. Арифметичні дії в Mathematica проводяться також, як в електронному калькуляторі. Можна проводити точні обчислення, а можна наближені з будь-яким ступенем точності. Mathematica „пам'ятає” усі прості елементарні функції й може конструювати їхній комбінації алгебри, а також ітерації функцій. Дуже зручні способи побудови графіків функцій. Можна будувати графіки у двовимірному й тривимірному просторі, можна будувати графіки неявних функцій, поверхні рівня функцій і все це в різних модифікаціях. Іноді зручно ілюструвати графік функції, залежної від параметра декількома графіками, відповідними до різних параметрів. Після цього, включивши анімацію, одержуємо своєрідне кіно - що рухаються в часі криві або інші об'єкти.

Таблиця 1.1. Швидкі клавіші в програмному середовищі Mathematica

Ключ	**Дія**
Shift+Enter	Завершене введення рядка; відправлення на виконання.
F1	виклик HELP.
Cell	Звертання до меню для роботи з позицією.

Palettes	Звертання до меню для роботи з палітрами.
Ctrl+	Зведення (виділеного виразу) у ступінь.
Ctrl+пропуск	Повернення курсору до основного рядка.
Ctrl+% (Ctrl+5)	Переміщення курсору між більш низькою й верхньою границями інтеграції.
Ctrl+K+підпорядок	Виклик списку ключових слів, що втримують даний підпорядок.
??підпорядок	Виклик списку ключових слів, що втримують дану підпорядок. У підпорядок для заміщення відсутніх символів дозволяє використання символу *****.
(Esc–a–Esc)	Символ α.
(Esc–b–Esc)	Символ β.
. . . .	. . .
(Esc–p–Esc)	Символ π.
Out[номер**]**	Звертання до вихідної позиції із вказівкою номера.
%	Звертання до попереднього вихідної позиції.
N[вираження, ціле число**]**	Перетворювач вираження в 10-овий дріб. Необов'язковий параметр – ціле число – загальна кількість знаків результату.
Clear	Очищення змінних.
/.	Операція підстановки.
Limit	Знаходження границі.
Plot	Побудова графіка.
Show	Відображає графіки, які є аргументами, на одній координатній площині.
D	Диференціювання.
Integrate	Інтегрування .

Findroot	Знаходження корінів рівняння.
Solve	Знаходження всіх корінів рівняння.
<<**Statistics`Master`**	Виклик модуля статистичних розрахунків.
PDF	Розрахунки щільності розподілу.
CDF	Розрахунки функції розподілу.
Mean	Розрахунки математичного розподілу.
Quantile	Розрахунки квантиля розподілу.
<<**Algebra** **`Inequalitysolve`**	Виклик модуля розв'язку алгебраїчних нерівностей.

Mathematica представлена стандартними палітрами:

Basic Calculations

палітри є розширеннями клавіатури

Таблиця 1.2. Частина стандартної палітри

α	β	γ	√■	Log[■]
δ	∈	ζ	■²	Exp[■]

У палітрі символ ■ означає позицію, у яку необхідно вставити вираз.

Таблиця 1.3. Функції в програмі Mathematica

■.□
Cross[■, □]
Outer[■, □, □]

ListConvolve[■, □]
ListCorrelate[■, □]
Tr[■]
Det[■]
Inverse[■]
Transpose[■]
Eigenvalues[■]
Eigenvectors[■]
LinearSolve[■, □]
RowReduce[■]

Усі операції в системі Mathematica в остаточному підсумку є перетвореннями символьних виразів. У системі Mathematica реалізована зручна система шаблонів для роботи із правилами перетворень. Команда /. означає, що програма повинна застосувати підстановку b → 1 + x до списку {a, b, c, d} :

{a, b, c, d} /. b -> 1 + x

{a, 1 + x, c, d}

Стандартне визначення функції:

$$\mathbf{f[x\_] := \frac{2}{x}}$$

Сформувати власну палітру легко за допомогою команди Create Table/Matrix/Palette у меню Input

Таблиця 1.4. Додаткові функції програми

Darken[■]	Lighten[■]
EdgeSelect[■]	□
Можна сформувати свої палітри для введення будь-якої функції або оператора Expand[■]	
Factor[■]	
Simplify[■]	

Mathematica як мова програмування. У систему Mathematica вбудована дуже гнучка й інтуїтивно зрозуміла мова програмування. Мова Mathematica підтримує всі основні сучасні методи програмування, а також надає деякі нові можливості. Mathematica включає широкий спектр програмування - таким чином, будь-яку програму можна написати найбільш відповідним для неї способом.

2. Виконання розрахунків на занятті

Приклад розрахунку

Таблиця 1.5. Вихідні дані до прикладу розрахунку

1	Число **pi**
2	Основу натурального логарифма **Exp[1]**
3	Косинус **60** градусів
4	Синус **45** градусів
5	Число **2** у ступені **10**
6	Визначити модуль числа **-5**
7	Визначити значення квадратного кореня числа **-4**
8	Визначити факторіал числа **5**
9	Обчислити інтеграл $\mathbf{e^x}$
10	Додати синус **30** градусів і косинус **60** градусів

```
N[Pi]
3.14159

N[Exp[1]]
2.71828

Косинус в радіанах;

In[3]:= N[Cos[Pi / 3]]
Out[3]= 0.5

те ж саме в градусах;

In[2]:= N[Cos[60 °]]
Out[2]= 0.5

N[Sin[45 °]]
0.707107

N[2 ^ 10]
1024.

N[Abs[5]]
5.
```

$N\left[\sqrt{4}\right]$

```
2.

N[5 !]
120.
```

$N\left[\int e \wedge x \, dx\right]$

2.71828^{x}

```
N[Sin[30 °] + Cos[60 °]]
1.
```

3. Завдання: згідно із синтаксисом програмного середовища визначити

№	Варіант														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1/2	3/5	2+6	15*3	12*2	7*8	35+78	12+5	77-49	23*5	16+7	64/8	12/3	100/4	25/5
2	$\mathbf{e}^{2}$	$\mathbf{e}^{3}$	$\mathbf{e}^{4}$	$\mathbf{e}^{5}$	$\mathbf{e}^{6}$	$\mathbf{e}^{7}$	$\mathbf{e}^{8}$	$\mathbf{e}^{9}$	$\mathbf{e}^{10}$	$\mathbf{e}^{11}$	$\mathbf{e}^{12}$	$\mathbf{e}^{13}$	$\mathbf{e}^{14}$	$\mathbf{e}^{15}$	$\mathbf{e}^{16}$
3	Cos 10	Cos 15	Cos 20	Cos 25	Cos 30	Cos 35	Cos 40	Cos 45	Cos 50	Cos 55	Cos 60	Cos 65	Cos 70	Cos 75	Cos 80
4	Sin 10	Sin 15	Sin 20	Sin 25	Sin 30	Sin 35	Sin 40	Sin 45	Sin 50	Sin 55	Sin 60	Sin 65	Sin 70	Sin 75	Sin 80
5	5^{2}	5^{3}	5^{4}	5^{5}	5^{6}	5^{7}	5^{8}	5^{9}	5^{10}	5^{11}	5^{12}	5^{13}	5^{14}	5^{15}	5^{16}
6	модуль числа **-10**	модуль числа **10**	модуль числа **-35**	модуль числа **20**	модуль числа **-50**	модуль числа **-112**	модуль числа **0.5**	модуль числа **15**	модуль числа **-100**	модуль числа **30**	модуль числа **-1.1**	модуль числа **11**	модуль числа **-40**	модуль числа **-70**	модуль числа **70**
7	корінь 25	корінь 0,01	корінь 81	корінь 49	корінь 100	корінь 16	корінь 36	корінь 49	корінь 64	корінь 9	корінь 625	корінь 225	корінь 121	корінь 2,25	корінь 6,25
8	1!	2!	3!	4!	6!	7!	8!	9!	10!	11!	12!	13!	14!	15!	16!

9	Обчислити інтеграл **Cos x**	Обчислити інтеграл **Sin x**	Обчислити інтеграл **Tg x**	Обчислити інтеграл **Ctg x**	Обчислити інтеграл **Arctg x**	Обчислити інтеграл **Arcctg x**	Обчислити інтеграл **Cos** $\mathbf{30^{o}}$	Обчислити інтеграл **Sin** $\mathbf{30^{o}}$	Обчислити інтеграл **Tg** $\mathbf{30^{o}}$	Обчислити інтеграл **Ctg** $\mathbf{30^{o}}$	Обчислити інтеграл **Arctg** $\mathbf{30^{o}}$	Обчислити інтеграл **Arcctg** $\mathbf{30^{o}}$	Обчислити інтеграл **Cos** $\mathbf{60^{o}}$	Обчислити інтеграл **Sin** $\mathbf{60^{o}}$	Обчислити інтеграл **Tg** $\mathbf{60^{o}}$
10	Додати синус **10** градусів і косинус **90** градусів	Додати синус **20** градусів і косинус **80** градусів	Додати синус **30** градусів і косинус **70** градусів	Додати синус **40** градусів і косинус **60** градусів	Додати синус **50** градусів і косинус **50** градусів	Додати синус **60** градусів і косинус **40** градусів	Додати синус **70** градусів і косинус**30** градусів	Додати синус **80** градусів і косинус **20** градусів	Додати синус **90** градусів і косинус **10** градусів	Відняти синус **90** градусів і косинус **10** градусів	Відняти синус **80** градусів і косинус **20** градусів	Відняти синус **70** градусів і косинус **30** градусів	Відняти синус **60** градусів і косинус **40** градусів	Відняти синус **50** градусів і косинус **50** градусів	Відняти синус **40** градусів і косинус **60** градусів
11-15	Придумати і реалізувати свій вираз														

Завдання №2

Тема: «Арифметичні й алгебраїчні обчислення ».

Мета роботи: ознайомитися з арифметичними й алгебраїчними обчисленнями програмного середовища.

1. Теоретичні відомості

Арифметичні дії в Mathematica проводяться також, як в електронному калькуляторі. Можна проводити точні обчислення, а можна наближені з будь-яким ступенем точності. Mathematica «пам'ятає» усі прості елементарні функції й може конструювати їхній комбінації алгебри, а також ітерації функцій. Передбачене зручне користування попереднім результатом.

Mathematica розглядає списки - упорядковані послідовності об'єктів. Така впорядкована безліч прийнято брати у фігурні дужки, тоді як аргументи функцій беруться у квадратних дужках. Номер елемента в списку (а також мультиіндекси координат тензора) записуються в подвійні фігурні дужки). Так, якщо b вектор (упорядкований набір чисел), те b[[4]]- четверта координата цього вектора, якщо d-тензор валентність два, то d[[3,5]] означає координату тензора з мультиіндексом 3,5. Різні розділи математики зібрані у відповідні пакети. Важливою особливістю Mathematica є можливість її розширення, тобто при необхідності «включити» новий пакет, що містить бракуючи функції або алгоритми.

Mathematica може проводити символьні обчислення, тобто обчислення алгебри над буквеними об'єктами. Досить зручні операції з багаточленами одного або декількох змінних.

Mathematica проводить усі дії алгебри над багаточленами, включаючи операцію розкладання на множники. З її допомогою можна (однієї командою) розв'язати рівняння – алгебраїчне або трансцендентне. Машина робить це або по відомій (можливо дуже непростий) формулі, або застосовує методи (алгоритми) чисельного аналізу. Особливим поняттям Mathematica, не має, очевидно, відповідності в математичній науці, є поняття шаблону (pattern). За допомогою цього поняття можливі спрощення в програмуванні мовою Mathematica.

▪ Чисельні розрахунки

- Суттєво оптимізована чисельна лінійна алгебра щільних матриць
- Нова оптимізована лінійна алгебра розріджених матриць
- Підтримка интимізованої лінійної алгебри довільної точності
- Команда Linearsolvefunction для розв'язку лінійних систем рівнянь для векторів і матриць
- Підтримка великомасштабного лінійного програмування методами внутрішньої крапки
- Нові методи й підтримка масивів змінних у командах Findroot і Findminimum
- Команда Findfit для нелінійної апроксимації кривими
- Команда глобальної оптимізації Nminimize
- Підтримка розв'язку n-мірних рівнянь із частками похідними в команді Ndsolve
- Підтримка розв'язку диференціальних рівнянь алгебри в команді Ndsolve
- Підтримка векторів і масивів у команді Ndsolve
- Надзвичайно широкий набір алгоритмів, що автоматично викликаються, у команді Ndsolve
- Більш висока точність і контроль точності наближених чисел
- Висока ефективність арифметики великих чисел, включаючи оптимізацію під конкретний процесор
- Посилені алгоритми для операцій в області теорії чисел, включаючи GCD і Factorinteger
- Пряма підтримка високопродуктивних основних статистичних функцій
- Символьні розрахунки
- Розв'язок змішаних систем рівнянь і нерівностей командою Reduce
- Повний розв'язок поліноміальних систем у поле речовинних і комплексних чисел
- Розв'язок широкого класу Діофантових рівнянь
- Forall і Exists квантори й кванторне виключення
- Представлення дискетних і безперервної множини алгебри й трансцендентних розв'язків

▪ Команда Findinstance для знаходження прикладів розв'язків для різних областей визначення змінних

▪ Точна мінімізація в полях цілих і дійсних чисел

▪ Інтегрована підтримка допущень за допомогою функцій Assuming і Refine

▪ Rsolve для розв'язку рекуррентних рівнянь

▪ Підтримка нелінійних і різницевих рівнянь і систем

▪ Повний розв'язок систем раціональних звичайних диференціальних рівнянь

▪ Підтримка диференціальних рівнянь алгебри

▪ Команда Coefficientarrays для конвертації систем рівнянь у тензори.

Система Mathematica надає Вам великі обчислювальні можливості, залишаючись при цьому такою ж простою у використанні, як і калькулятор. Ця команда створює матрицю випадкових чисел розміру /. Крапка з комою наприкінці команди забороняє вивід матриці на екран.

```
m = Table[Random[], {100}, {100}];
```

Mathematica легко виправляється з перетвореннями алгебри, які зайняли б роки ручної роботи. Розкладання полінома на множники:

Factor$[x^{99}+y^{99}]$

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$$
$$(x^{10}-x^9y+x^8y^2-x^7y^3+x^6y^4-x^5y^5+x^4y^6-x^3y^7+x^2y^8-xy^9+y^{10})$$
$$(x^{20}+x^{19}y-x^{17}y^3-x^{16}y^4+x^{14}y^6+x^{13}y^7-x^{11}y^9-x^{10}y^{10}-x^9y^{11}+x^7y^{13}+x^6y^{14}-x^4y^{16}-x^3y^{17}+xy^{19}+y^{20})$$
$$(x^{60}+x^{57}y^3-x^{51}y^9-x^{48}y^{12}+x^{42}y^{18}+x^{39}y^{21}-x^{33}y^{27}-x^{30}y^{30}-x^{27}y^{33}+x^{21}y^{39}+x^{18}y^{42}-x^{12}y^{48}-x^9y^{51}+x^3y^{57}+y^{60})$$

Система Mathematica використовує уточнені алгоритми для спрощення виразів. Тут % заміняє собою результат попереднього обчислення.

```
Simplify[%]
```

$x^{99}+y^{99}$

Mathematica автоматично вибирає алгоритм для кожного обчислення

```
FindRoot[Cos[x] == x + Log[x], {x, 1}]
```

$\{x \to 0.840619\}$

```
NIntegrate[Log[x + Sin[x]], {x, 0, 2}]
0.555889
NSolve[x^5 - 6 x^3 + 8 x + 1 == 0, x]
{{x → -2.05411}, {x → -1.2915}, {x → -0.126515}, {x → 1.55053}, {x → 1
```

Ця команда генерує двовимірну таблицю:

```
m = Table[2^i + x^j, {i, 3}, {j, 4}]
{{2 + x, 2 + x^2, 2 + x^3, 2 + x^4},
 {4 + x, 4 + x^2, 4 + x^3, 4 + x^4}, {8 + x, 8 + x^2, 8 + x^3, 8 + x^4}}
```

зображення таблиці в матричній формі:

```
MatrixForm[m]
```

$$\begin{pmatrix} 2+x & 2+x^2 & 2+x^3 & 2+x^4 \\ 4+x & 4+x^2 & 4+x^3 & 4+x^4 \\ 8+x & 8+x^2 & 8+x^3 & 8+x^4 \end{pmatrix}$$

2. Виконання розрахунків на занятті

Приклад розрахунку

Таблиця 2.1. Вихідні дані до прикладу розрахунку

1	$ax^2+bx+c=0$, знайти корінь рівняння
2	$\int 2x\,dx$
3	$\int_0^2 (x^2 + \sin(bx))dx$
4	$5x^2-20x+10=0$, знайти корінь рівняння
5	$x^3-5x^2+6=0$, знайти корінь рівняння
6	$\int_0^2 Log(x + \sin(x))dx$
7	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$
8	$x^5-6x^3+8x+1=0$, знайти корінь рівняння
9	$\int_0^2 (cos(x) + \sin(x))dx$
10	$\int_0^5 \cos(5x)dx$

Приклад розв’язку завдання №2

In[1]:= `Solve[a*x^2 + b*x + c == 0, x]`

Out[1]= $\left\{\left\{x \to \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}\right\}, \left\{x \to \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}\right\}\right\}$

In[2]:= $\int 2 x \, dx$

Out[2]= x^2

In[3]:= $\int_0^2 (x\text{^}2 + \text{Sin}[b * x]) \, dx$

Out[3]= $\frac{8}{3} + \frac{2 \,\text{Sin}[b]^2}{b}$

In[4]:= `Solve[5 x^2 - 20 x + 10 == 0, x]`

Out[4]= $\left\{\left\{x \to 2 - \sqrt{2}\right\}, \left\{x \to 2 + \sqrt{2}\right\}\right\}$

In[5]:= `Solve[x^3 - 5 x^2 + 6 == 0, x]`

Out[5]= $\left\{\{x \to -1\}, \left\{x \to 3 - \sqrt{3}\right\}, \left\{x \to 3 + \sqrt{3}\right\}\right\}$

In[6]:= $\int_0^2 \text{Log}\,(x + \text{Sin}[x]) \, dx$

Out[6]= $-\text{Log}\,(-3 + \text{Cos}[2])$

In[7]:= $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$

Out[7]= $\frac{\pi^2}{6}$

In[8]:= `Solve[x^5 - 6 x^3 + 8 x + 1 == 0, x]`

Out[8]= $\{\{x \to \text{Root}[1 + 8 \#1 - 6 \#1^3 + \#1^5 \&, 1]\},$
$\{x \to \text{Root}[1 + 8 \#1 - 6 \#1^3 + \#1^5 \&, 2]\}, \{x \to \text{Root}[1 + 8 \#1 - 6 \#1^3 + \#1^5 \&, 3]\},$
$\{x \to \text{Root}[1 + 8 \#1 - 6 \#1^3 + \#1^5 \&, 4]\}, \{x \to \text{Root}[1 + 8 \#1 - 6 \#1^3 + \#1^5 \&, 5]\}\}$

In[9]:= Знаходимо інтеграл; Обчислюємо його числове значення;

In[10]:= $\int_0^2 (\text{Cos}[x] + \text{Sin}[x]) \, dx$

Out[10]= $2\,\text{Sin}[1]^2 + \text{Sin}[2]$

In[11]:= N[%]

Out[11]= 2.32544

In[12]:= $\int_0^5 \text{Cos}[5\,x] \, dx$

Out[12]= $\frac{\text{Sin}[25]}{5}$

3. Завдання: згідно з варіантом зробити арифметичні й алгебраїчні обчислення

№	Варіант							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\int \sqrt{x}\ dx$	$\int \frac{dx}{x^3}$	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$	$\int 2^x\ dx$	$\int \frac{dx}{2^x}$	$\int x^3\ dx$	$\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx$	$\int x^4\ dx$
2	$\int_1^2 x\cos x^2 dx$	$\int_{-1}^2 x\sin x^2 dx$	$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x dx$	$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$	$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$	$\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$	$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\sin 2xdx$	$\int_0^1 xe^{-x}dx$
3	$4x^2+40x+116=0$, знайти корені рівняння	$4x^2-60x+56=0$, знайти корені рівняння	$3x^2-3x-90=0$, знайти корені рівняння	$-2x^2+16x+40=0$, знайти корені рівняння	$-4x^2+20x+24=0$, знайти корені рівняння	$-4x^2-4x+168=0$, знайти корені рівняння	$3x^2-21x-294=0$, знайти корені рівняння	-x2-22x-120= 0 знайти корені рівняння
4	$2x^3-x^2-3x-3=0$ знайти корінь рівняння	$x^3+x^2+\frac{1}{3}x-2=0$ знайти корінь рівняння	$16x^4-24x^3+5x^2 20x-25=0.$ знайти корінь рівняння	$x^4+x^2-12x+21=0$ знайти корінь рівняння	$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ знайти корінь рівняння	$x^4-2x^3-11x^2+12x+36=0$ знайти корінь рівняння	$x^4+x^3-8x^2+3x+5=0$ знайти корінь рівняння	$x^4+5x^3-x^2-12x-6=0$ знайти корінь рівняння

5	$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)^2}$	$\sum_{n=0}^{10}5^n$	$\sum_{n=0}^{25}(-1)^{3n}$	$\sum_{n=0}^{10}(-1)^{2n}$	$\sum_{n=1}^{15}\frac{1}{n^5}$	$\sum_{n=1}^{35}\frac{7}{n(n+5)}$	$\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{n(n+1)^3}$	$\sum_{n=0}^{10}2^{2n}$
6.. 10	Придумати і реалізувати свій вираз							

№	Варіант						
	9	10	11	12	13	14	15
1	$\int\frac{dx}{x^5}$	$\int\sqrt[3]{x}\,dx$	$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$	$\int 5^x\,dx$	$\int\frac{dx}{4^x}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$	$\int\frac{dx}{5^x}$
2	$\int_0^1 xe^{3x}dx$	$\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$	$\int_1^e \ln^2 x dx$	$\int_1^3 \ln x dx$	$\int_0^\pi x^2\cos x dx$	$\int_{-2}^1 x\cos x^2 dx$	$\int_0^2 (x^2+cos(x))d$
3	3x2 + 42 x + 72 = 0 знайти корені рівняння	4x2 + 40 x = 0 знайти корені рівняння	-5x2 - 45 x + 450 = 0 знайти корені рівняння	-2x2 + 128 = 0 знайти корені рівняння	-5x2 - 15 x = 0 знайти корені рівняння	-5x2 - 55 x + 130 = 0 знайти корені рівняння	-4x2 + 40 x - 84 = 0, знайти корінь рівняння
4	$x^3+x^2-5x-5=0$	$x^4+7x^2-4x+20=0$	$(x^2-3x)^2-(5x-7)^2=0$ знайти	$(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$ знайти	$x^4+16x-12=0$ знайти	$x^3+6x^2+12x-10=0$ знайти	x^3-3x^2+3x- знайти

	знайти корінь рівняння	знайти корінь рівняння	корінь рівняння	корінь рівняння	корінь рівняння	корінь рівняння	корінь рівняння
5	$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$	$\sum_{n=0}^{20}1^n$	$\sum_{n=0}^{15}(-1)^n$	$\sum_{n=0}^{30}(-1)^n$	$\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{40}\frac{20}{n(n+1)}$	$\sum_{i=1}^{40}\frac{1}{i}$
6	Придумати і реалізувати свій вираз						
7							
8							
9							
10							

Завдання №3

Тема: «Розв'язок алгебраїчних рівнянь і оптимізаційних завдань».

Мета роботи: ознайомитися з теорією завдань оптимізації та розв'язком оптимізаційних завдань за допомогою алгебраїчних рівнянь програмного середовища.

1. Теоретичні відомості

Оптимізація - це вибір, тобто те, чим постійно доводиться займатися у повсякденному життя. Терміном "оптимізація" у літературі позначений процес або послідовність операцій, що дозволяють одержати уточнений розв'язок. Хоча кінцевою метою оптимізації є відшукання найкращого або "оптимального" розв'язку, звичайно доводиться задовольняти поліпшенням відомих розв'язків, а не доведення до досконалості. По цьому під оптимізацією розуміють скоріше прагнення до досконалості, яка, можливо, і не буде досягнутою Необхідність прийняття найкращих розв'язків так само стара, як саме людство. Споконвіку люди, приступаючи до здійснення своїх заходів, роздумували над їхніми можливими наслідками й ухвалювали рішення, вибираючи тим або іншим чином залежні параметри - способи організації заходів. Але до пори, до часу розв'язкимогли прийматися без спеціального математичного аналізу просто на основі досвіду й здорового глузду.

Приведемо приклад: людина вийшла ранком з будинку, щоб їхати на роботу. З ходу справи йому доводиться прийняти цілий ряд розв'язків: брати з собою парасольку? У якому місці перейти вулицю? Яким видом транспорту скористатися? І так далі. Зрозуміло, усі ці розв'язки людини ухвалює без спеціальних розрахунків, просто опираючись на досвід і на здоровий глузд. Для обґрунтування таких розв'язків наука не потрібна, та чи навряд знадобиться й надалі. Однак приведемо інший приклад. Допустимо, організується робота міського транспорту. У нашому розпорядженні є якась кількість транспортних засобів. Необхідно прийняти ряд рішень наприклад: яку кількість і яких транспортних засобів направити по тому або іншому маршруту? Як змінювати частоту проходження маршруту залежності від часу доби? Де розмістити зупинки? І так далі. Ці рішення є набагато більше відповідальними, ніж рішення попереднього прикладу. У силу складності явища наслідку кожної з них не настільки ясні; для того, щоб уявити собі ці наслідки потрібно провести розрахунки. А головне, від цих рішень набагато більше залежить. У першому прикладі неправильний вибір рішень зачепить інтереси однієї людини; у другому - може відбитися на діловому житті цілого міста.

Звичайно, і в другому прикладі при виборі рішення можна діяти інтуїтивно, опираючись на досвід і здоровий глузд. Але рішення виявляться набагато більш розумними, якщо вони будуть підкріплені кількісними, математичними розрахунками. Ці попередні розрахунки допоможуть уникнути тривалого й дорогого пошуку правильного розв'язку " навмання".

Найбільше складно полягає справа із прийняттям розв'язків, коли мова про заходи, досвіду в проведенні яких ще не існує й, отже, здоровому глузду немає на що опиратися, а інтуїцію не обдурити. Нехай, наприклад, складається перспективний план озброєння на кілька років уперед. Зразки озброєння, про які може йти мова, ще не існують, ніякого досвіду їх застосування При плануванні доводиться опиратися на велику кількість даних, що відносяться не стільки до минулого досвіду, скільки до майбутнього, що передбачається. Обраний розв'язок повинний по можливості гарантувати нас від помилок, пов'язаних з неточним прогнозування й бути досить ефективним для широкого кола умов. Для обґрунтування такого розв'язку приводиться в дію складна система математичних розрахунків.

Взагалі, чим складніший захід, що організовується, чим більше вкладається в нього матеріальних засобів, чим ширше спектр його можливих наслідків, тем менш припустимі так звані "вольові" рішення, що не опираються на науковий розрахунки, і тем більше значення одержує сукупність наукових методів, що дозволяють заздалегідь оцінити наслідки кожного рішення, заздалегідь відкинути неприпустимі варіанти й рекомендувати ті, які представляють найбільш удалими.

Практика породжує всі нові й нові завдання оптимізації причому складність росте. Потрібні нові математичні моделі й методи, які враховують наявність багатьох критеріїв, проводять глобальний пошук оптимуму. Інакше кажучи, життя змушує розвивати математичний апарат оптимізації.

Реальні прикладні задачі оптимізації дуже складні. Методи оптимізації далеко не завжди справляються з розв'язком реальних завдань без допомоги людини. Немає поки такої теорії, яка врахувала б будь-які особливості функцій, що описують постановку завдання Слід віддавати перевагу таким методам, якими простіше управляти в процесі розв'язку завдання.

Формулювання математичного завдання оптимізації в загальному виді математичне завдання оптимізації можна сформулювати в такий спосіб:

Мінімізувати (максимізувати) цільову функцію з урахуванням обмежень на керовані змінні.

Під *мінімізацією (максимізацією)* функції *n* змінних *f(x)=f(x1,... ,xn)* на заданій множині (U n-мірного векторного простору *En* розуміється визначення хоча б однієї із точок мінімуму (максимуму) цієї функції на множині U, а також, якщо це необхідно, і мінімального (максимального) на *U* значення f(*x).*

При записі математичних завдань оптимізації в загальному виді звичайно використовується наступна символіка:

f(x) -> min (max), x належить U,

де *f(x)* - цільова функція, а *U* - припустима безліч, задане обмеженнями на керовані змінні.

Приклад розв'язку рівняння:

```
1) NSolve[x^5-6x^3+8x+1==0,x]
{{x→-2.05411},{x→-1.2915},{x→0.126515},
{x→1.55053},{x→1.9216}}
2)NMinimize[{Cos[x y]+x,x^2+y^2≤10},{x,y}]
{-3.99011,{x→-2.99809,y→1.0057}}
```

2. Виконання розрахунків на занятті

Приклад розрахунку

Таблиця 3.1. Вихідні дані до прикладу розрахунку

$F(x)=x_1-2x_2->min$, $-x_1+x_2<=0$, $2x_1+x_2<=3$, $x_1-x_2<=1$, $x_1,x_2>=0$	$F(x)=-x_1-3x_2->min$, $2x_1+x_2<=2$, $x_1-x_2>=0$, $x_1-x_2<=1$, $x_1,x_2>=0$	$F(x)=-2x_1-x_2->min$, $2x_1+x_2>=1$, $3x_1-x_2>=-1$, $x_1-4x_2<=2$, $x_1,x_2>=0$	$F(x)=-x_1-x_2->min$, $x_1<=3$, $x_2<=2$, $x_1+x_2<=1$, $x_1,x_2>=0$

$x_1+x_2+x_3+x_4=7$ - $3x_1+x_2+2x_3+x_4=6$ $2x_1+x_2+x_3-x_4=2$	$15x_1+2x_2-3x_3-x_4+x_5=4$ $2x_1+x_2+x_3-2x_4=3$ $x_3+5x_4+2x_5=7$	x1+x2-x3=1 -x2+x3+x4=1 x2+x3+x5=2	$x^2+xy+y^2=4$ $x+xy+y=2$

```
NSolve[{x1 + x2 + x3 + x4 = 7, -3 x1 + x2 + 2 x3 + x4 = 6, 2 x1 + x2 + x3 - x4 = 2, x1 == 0},
 {x1, x2, x3, x4}]
```

$\{\{x1 \to -1.99782\times10^{-16},\ x2 \to 5.5,\ x3 \to -1.,\ x4 \to 2.5\}\}$

```
ConstrainedMin[x1 - 2 x2, {-x1 + x2 ≤ 0, 2 x1 + x2 ≤ 3, x1 - x2 ≤ 1, x1 ≥ 0, x2 ≥ 0},
 {x1, x2}]
```

{-1, {x1 → 1, x2 → 1}}

```
NSolve[{15 x1 + 2 x2 - 3 x3 - x4 + x5 = 4, 2 x1 + x2 + x3 - 2 x4 = 3, x3 + 5 x4 + 2 x5 = 7,
  x1 = 1, x2 = 1}, {x1, x2, x3, x4, x5}]
```

{{x1 → 1., x2 → 1., x3 → 3.14286, x4 → 1.57143, x5 → -2.}}

```
ConstrainedMin[-x1 - 3 x2, {2 x1 + x2 ≤ 2, x1 - x2 ≥ 0, x1 - x2 ≤ 1, x1 ≥ 0, x2 ≥ 0},
 {x1, x2}]
```

$\left\{-\frac{8}{3},\ \left\{x1 \to \frac{2}{3},\ x2 \to \frac{2}{3}\right\}\right\}$

```
NSolve[{x1 + x2 + x3 = 1, -x1 + x3 + x4 = 1, x2 + x3 + x5 = 2, x1 = 1, x2 = 1},
 {x1, x2, x3, x4, x5}]
```

{{x1 → 1., x2 → 1., x3 → -1., x4 → 3., x5 → 2.}}

```
ConstrainedMin[-2 x1 - x2, {2 x1 + x2 ≥ 1, 3 x1 - x2 ≥ -1, x1 - 4 x2 ≤ 2, x1 ≥ 0, x2 ≥ 0},
 {x1, x2}]
```

ConstrainedMin::nbdd : Specified domain appears unbounded.

{-∞, {x1 → Indeterminate, x2 → Indeterminate}}

```
ConstrainedMin[-x1 - x2, {x1 ≤ 3, x2 ≤ 2, x1 + x2 ≤ 1, x1 ≥ 0, x2 ≥ 0}, {x1, x2}]
```

{-1, {x1 → 1, x2 → 0}}

```
NSolve[{x^2 + x * y + y^2 = 4, x + xy + y = 2}, {x, y}]
```

$$\left\{\left\{x \to 1.\left(1. - 0.5\,xy - 0.866025\sqrt{1.33333 + 4.\,xy - 1.\,xy^2}\right),\right.\right.$$
$$\left.y \to 0.5\left(2. - 1.\,xy + 1.73205\sqrt{1.33333 + 4.\,xy - 1.\,xy^2}\right)\right\},$$
$$\left\{x \to 1.\left(1. - 0.5\,xy + 0.866025\sqrt{1.33333 + 4.\,xy - 1.\,xy^2}\right),\right.$$
$$\left.\left.y \to 0.5\left(2. - 1.\,xy - 1.73205\sqrt{1.33333 + 4.\,xy - 1.\,xy^2}\right)\right\}\right\}$$

3. Завдання: використовуючи синтаксис програмного середовища розв'язати систему алгебраїчних рівнянь

№	Варіант				
	1	2	3	4	5
1	$\begin{cases} -2x+4y=0 \\ 5x-y=4 \end{cases};$	$\begin{cases} x+5y=16 \\ 4y=12 \end{cases};$	$\begin{cases} 3x+2y=10 \\ 4x-y=6 \end{cases};$	$\begin{cases} 4x+2y=10 \\ x-3y=2 \end{cases};$	$\begin{cases} 5x-2y=3 \\ x-y=4 \end{cases};$
2	$\begin{cases} 5x_1+x_2-x_3=5, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=-4, \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1, \\ -x_1+x_2+2x_3=3. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-6 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=20 \\ 5x_1-6x_2+4x_3=-12 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=-4 \\ x_1+3x_2+2x_3=3 \\ 3x_1+2x_2+4x_3=-4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=-7; \\ 3x_1-x_2+2x_3=1; \\ 2x_1-x_2+3x_3=3; \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1; \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6; \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-2y+z=-1 \\ x-y+2z=-1; \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8; \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+y-z=0 \\ 2x-y+z=6; \end{cases}$
4	Придумати і реалізувати свій вираз				
5					

№	Варіант				
	6	7	8	9	10
1	$\begin{cases} 4x-5y=0 \\ -3x+2y=1 \end{cases};$	$\begin{cases} x-2y=7 \\ 4x+3y=5 \end{cases};$	$\begin{cases} -x-6y=3 \\ -5x+2y=2 \end{cases}.$	$\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 5x-3y=0 \end{cases};$	$\begin{cases} x+7y=0 \\ 2x15=0 \end{cases}.$
2	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1; \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4; \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2; \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=-6; \\ -2x_1+x_2-3x_3=-3; \\ 3x_1-x_2+x_3=9; \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=2; \\ 2x_1+3x_2-2x_3=5; \\ -2x_1-x_2+2x_3=-1; \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-10; \\ 2x_1-x_2+x_3=16; \\ -x_1+2x_2-x_3=-17; \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=2; \\ 3x_1-x_2-x_3=6; \\ 2\mathrm{x}_1+x_2-x_3=-1; \end{cases}$
3	$\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y+2z=1 \\ x-y-2z=1. \end{cases}$	$\begin{cases} 4x-y+2z=2 \\ 5x+3y+z=-2 \\ 4x-5y+2z=1; \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+5z=5 \\ 3x-y-2z=1 \\ 4x+3y+z=6; \end{cases}$	$\begin{cases} 5x+2y-7z=2 \\ 7x-2y+6z=2 \\ 3x+2y+7z=8; \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ 7x+9y+2z=1 \\ x-5y-9z=1. \end{cases}$
4	Придумати і реалізувати свій вираз				
5					

Завдання №4

Тема: «Розв'язок диференціальних рівнянь».

Мета роботи: ознайомитися з мовою програмування для розв'язку диференціальних рівнянь.

1. Теоретичні відомості

Приклад розв'язку диференціального рівняння в програмному середовищі Mathematica:

1)

```
Ndsolve[{x''[t]+x[t]3==Sin[t],x[0]==x'[0]==0},x,
{t,0,50}]
{{x→interpolatingfunction[{{0.,50.}},<>]}}
2)Dsolve[y''[x]+y'[x]+x y[x]==0,y[x],x]
```

$$y\,x \; x\;2\;\mathrm{AiryAi}\;1\;1\;3\;\frac{1}{4}\;x\;C\;1\;\;x\;2\;\mathrm{AiryBi}\;1\;1\;3\;\frac{1}{4}\;x\;C\;2$$

2. Виконання розрахунків на занятті

Приклад розрахунку

№	Рівняння	Початкові умови
1	$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0$	x=1, x'=2, при t=0
2	$\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{d^2x}{dt^2}=0$	x=2, x'=0, x”=1 при t=0
3	$\frac{d^2x}{dt^2}+2a\frac{dx}{dt}+(a^2+b^2)x=0$	$x=x_0$, $x'=x_0'$ при t=0
4	$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x=e^{5x}$	x=1, x’=2 при t=0
5	$\frac{d^2x}{dt^2}+m^2x=a\cos nt$	$x=x_0$, $x'=x_0'$ при t=0

№	Рівняння	Початкові умови
6	$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}=t^2$	x=0, x'=0 при t=0
7	$\frac{d^3x}{dt^3}+x=\frac{1}{2}t^2e^t$	x=x' =x''=0 при t=0
8	$\frac{d^3x}{dt^3}+x=1$	$x_0=x_0'=x''_0=0$ при t=0
9	$\frac{d^4x}{dt^4}-2\frac{d^2x}{dt^2}+x=\sin t$	$x_0=x_0'=x''_0=x'''_0=0$ при t=0
10	$\frac{d^2x}{dt^2}+y=1, \frac{d^2y}{dt^2}+x=0$	$x_0=y_0=x_0'=y'_0=0$ при t=0

1;

```
In[15]:= NDSolve[{x''[t] + 3 x'[t] + 2 x[t] == 0, x[0] == 1, x'[0] == 2}, x, {t, 0, 50}]

Out[15]= {{x → InterpolatingFunction[{{0., 50.}}, <>]}}
```

2;

```
In[2]:= NDSolve[{x'''[t] - x''[t] == 0, x[0] == 2, x'[0] == 0, x''[0] == 1}, x, {t, 0, 3}]

Out[2]= {{x → InterpolatingFunction[{{0., 3.}}, <>]}}
```

3;

```
In[3]:= NDSolve[{x''[t] + 2 a x'[t] + (a^2 + b^2) x[t] == 0, x[0] == x'[0] == 0}, x, {t, 0, 3}]

Out[3]= {{x → InterpolatingFunction[{{0., 3.}}, <>]}}
```

4;

```
In[4]:= NDSolve[{x''[t] - 3 x'[t] + 2 x[t] == E^(5 x[t]), x[0] == 1, x'[0] == 2}, x, {t, 0, 50}]

NDSolve::ndsz : At t == 0.06877483574670884`, step size is effectively zero; singularity or stiff system suspected. >>

Out[4]= {{x → InterpolatingFunction[{{0., 0.0687748}}, <>]}}
```

5;

```
In[20]:= n = 2

Out[20]= 2

In[21]:= m = 1.5

Out[21]= 1.5

In[22]:= a = 3

Out[22]= 3

In[23]:= NDSolve[{x''[t] + m^2 x[t] == a Cos[n t], x[0] == x'[0] == 0}, x, {t, 0, 50}]

Out[23]= {{x → InterpolatingFunction[{{0., 50.}}, <>]}}

In[24]:= Clear[n, m, a]
```

```
In[25]:= 6;

In[28]:= NDSolve[{x''[t] - x'[t] = t^2, x[0] == x'[0] = 0}, x, {t, 0, 50}]

Out[28]= {{x → InterpolatingFunction[{{0., 50.}}, <>]}}

In[29]:= 7;

In[30]:= NDSolve[{x'''[t] + x[t] = 1/2 t^2 e^t, x[0] == x'[0] = x''[0] == 0}, x,
          {t, 0, 50}]

Out[30]= {{x → InterpolatingFunction[{{0., 50.}}, <>]}}

In[31]:= 8;

In[41]:= NDSolve[{x'''[t] + x[t] = 1, x[0] == x'[0] = x''[0] == 0}, x, {t, 0, 50}]

Out[41]= {{x → InterpolatingFunction[{{0., 50.}}, <>]}}

In[40]:= 9;

In[44]:= NDSolve[{x''''[t] - 2 x''[t] + x[t] = Sin[t],
           x[0] == x'[0] = x''[0] = x'''[0] == 0}, x, {t, 0, 1}]

Out[44]= {{x → InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>]}}

In[45]:= 10;

In[49]:= NDSolve[{x''[t] + y[t] = 1, y''[t] + x[t] = 0,
           x[0] == x'[0] = y[0] = y'[0] == 0}, {x, y}, {t, 0, 50}]

Out[49]= {{x → InterpolatingFunction[{{0., 50.}}, <>],
           y → InterpolatingFunction[{{0., 50.}}, <>]}}
```

3. Завдання: використовуючи синтаксис програмного середовища розв'язати систему алгебраїчних рівнянь

№	Варіант				
	1	2	3	4	5
1	$y' = x^2 - y^2$; $y(-1)=0$, x=2	$y' = x^2 + y^2$; $y(0)=0$,x=3	$y' = x + y$; $y(0)=1$,x=1	$y' = 2y - 2x^2 - 3$; $y(0)=2$, x=1.5	$xy' = 2x - y$; $y(1)=2$, x=4
2	$y'' + y = x$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$, x=1.5	$y'' + xy' + y = 5$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$, x=2	$y'' - y'\sin x + e^x y = x$; $y(0)=1$, $y'(0)=-1$, x=2.5	$y'' - 5y' + 6y = 0$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$	$y'' + x^2 y = \cos x$; $y(0)=0$, $y'(0)=2$, x=3
3	$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$, якщо $y(0) = 0$,x=0.5	$(1-x^2)y' + xy = 1$, якщо $y(0) = 1$,x=1.1	$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x\sqrt{x^2+1}$, якщо $y(0) = 2$,x=1.8	$y' = 5\sqrt{y}$, якщо $y(0) = 25$.	$(1+t^2)y' + y = 0$, якщо $y(0) = 1$
4	$y'' = \sin 5x$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, x=0.3	$y'' = 120x^4 + 4$, якщо $y(1) = -10$, $y'(1) = 3$, x=3	$y'' = -\frac{4}{x}y' + \frac{1}{x^6}$, якщо $y(-1) = \frac{1}{4}$, $y'(-1) = 4$, x=2	$y'' = -\frac{2}{y^5}$, якщо $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$	$2xy'' - y' = 0$, якщо $y(4) = 10$, $y'(4) = 3$, x=2
5-8	Придумати і реалізувати свій вираз				
№	Варіант				
	6	7	8	9	10

1	$y' = x + y^2$; $y(0)=0$, x=1	$y' + \frac{1}{x-1} y = 0$; $y(0)=1$, x=2.5	$y' = x - y$; $y(0)=1$, x=5	$y' = x^2 y^2 - 1$; $y(0)=1$, x=3.4	$y' = x^2 + y$; $y(0)=1$, x=0.6
2	$y''' - 2xy = 0$; $y(0)=1/2$, $y'(0)=y''(0)=1$, x=3.5	$y'' - y' \sin x + e^x y = x$; $y(0)=1$, $y'(0)=-1$, x=4	$y'' - 5y' + 6y = 0$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$	$y' - y = e^x$; $y(0)=1$, x=1.5	$y'' + y = \cos x$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$, x=0.1
3	$y' - e^{-t} + y - y'' = 1$, якщо $y(0) = \ln 5$.	$y' = 2\sqrt{y} \ln x$, якщо $y(e) = 1$,x=1	$y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0$, якщо $y(0) = 0$, x=2.2	$(x+1) y' + y = x^3 + x^2$, якщо $y(0) = 0$,x=3	$y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 4x + 5$, якщо $y(-1) = \frac{3}{2}$, x=2.2
4	$y'' - 2y' + 1 = 0$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$	$y'' - y' - 6y = 0$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$	$y'' + 6y' + 34y = 0$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$	$y'' - 12y' + 36y = 0$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.	$y'' + 5y' - 6y = 0$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$
5-8	Придумати і реалізувати свій вираз				

Завдання №5

Тема: «Освоєння графічних можливостей системи Mathematica».

Мета роботи: ознайомитися із графічною можливістю системи.

1. Теоретичні відомості

Дуже зручні способи побудови графіків функцій. Можна будувати графіки у двовимірному й тривимірному просторі, можна будувати графіки неявних функцій, поверхні рівня й усе це в різних модифікаціях. Іноді зручно ілюструвати графік функції, залежної від параметра декількома графіками, відповідними до різних параметрів. Після цього, включивши анімацію, одержуємо своєрідне кіно - що рухаються в часі криві або інші об'єкти.

Для креслення графіків функції однієї змінної – функція Plot:Options[Plot]

```
{AspectRatio → 1/GoldenRatio, Axes → Automatic, AxesLabel → None, AxesOrigin → Automatic,
AxesStyle → Automatic, Background → Automatic, ColorOutput → Automatic,
Compiled → True, DefaultColor → Automatic, DefaultFont → $DefaultFont,
DisplayFunction → $DisplayFunction, Epilog → {}, FormatType → $FormatType, Frame → False,
FrameLabel → None, FrameStyle → Automatic, FrameTicks → Automatic, GridLines → None,
ImageSize → Automatic, MaxBend → 10., PlotDivision → 30., PlotLabel → None,
PlotPoints → 25, PlotRange → Automatic, PlotRegion → Automatic, PlotStyle → Automatic,
Prolog → {}, RotateLabel → True, TextStyle → $TextStyle, Ticks → Automatic}
```

```
Plot[BesselJ[0, x^2], {x, 0, 5}]
```

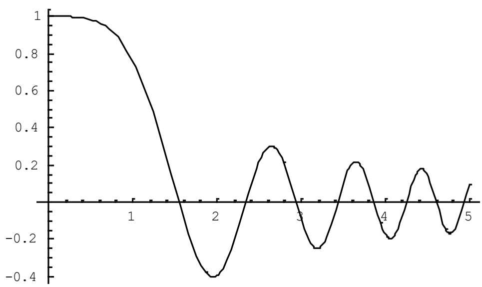


Рисунок 5.1

Функція Parametricplot дозволяє малювати криві й сімейства кривих, заданих параметрично. Функція має ті ж опції, що й функція Plot.

ParametricPlot[{Cos[5t],Sin[3t]},{t,0,2π},AspectRatio→Automatic];

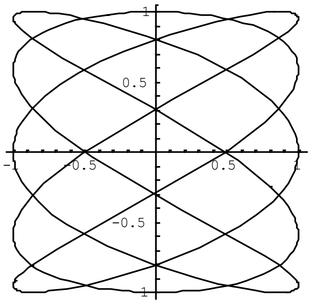


Рисунок 5.2

Для креслення графіків функції поверхні (3D –графіка) – функція Plot3 D:

Options[Plot3D]

{AmbientLight→GrayLevel[0],AspectRatio→Automatic,Axes→True,AxesEdge→Automatic,AxesLabel→None,AxesStyle→Automatic,Background→Automatic,Boxed→True,BoxRatios→{1,1,0.4},BoxStyle→Automatic,ClipFill→Automatic,ColorFunction→Automatic,ColorFunctionScaling→True,ColorOutput→Automatic,Compiled→True,DefaultColor→Automatic,DefaultFontƒ$DefaultFont,DisplayFunctionƒ$DisplayFunction,Epilog→{},FaceGrids→None,FormatTypeƒ$FormatType,HiddenSurface→True,ImageSize→Automatic,Lighting→True,LightSources→{{{1.,0.,1.},RGBColor[1,0,0]},{{1.,1.,1.},RGBColor[0,1,0]},{{0.,1.,1.},RGBColor[0,0,1]}},Mesh→True,MeshStyle→Automatic,Plot3Matrix→Automatic,PlotLabel→None,PlotPoints→25,PlotRange→Automatic,PlotRegion→Automatic,Prolog→{},Shading→True,SphericalRegion→False,TextStyleƒ$TextStyle,Ticks→Automatic,ViewCenter→Automatic,ViewPoint→{1.3,-2.4,2.},ViewVertical→{0.,0.,1.}}

Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4}];

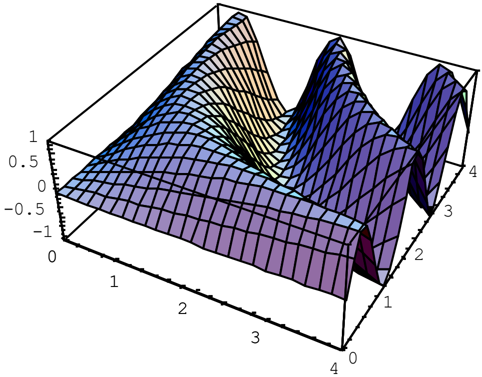


Рисунок 5.3

Функція Contourplot і Listcontourplot вичерчує графіки функцій, заданих аналітично (з лініями рівня)

Contourplot[Sin[x y],{x,-5,5},{y,-5,5}];

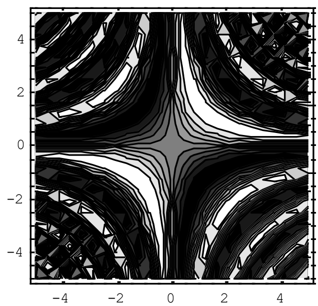


Рисунок 5.4

```
ListContourPlot[Table[x^2 − y^2 + Random[Real, {−0.2, 0.2}], {x, −2, 2, 0.1}, {y, −2, 2, 0.1}]]
```

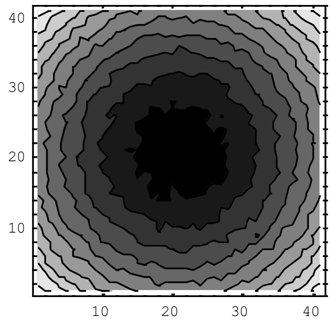


Рисунок 5.5

Для побудови графіків щільності є функції Densityplot і Listdensityplot

```
DensityPlot[Sin[1/(x y)], {x, −2, 2}, {y, −2, 2}, PlotPoints → 25]
```

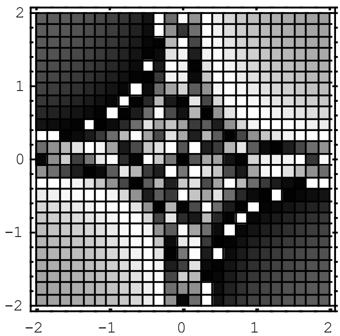


Рисунок 5.6

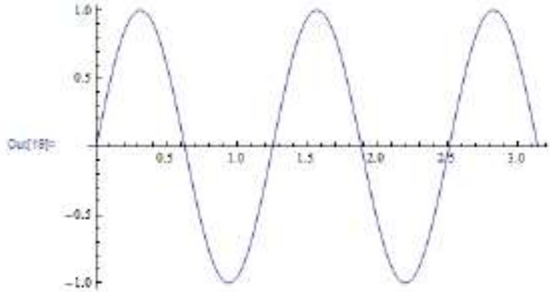
2. Виконання розрахунків на занятті

Приклад застосування

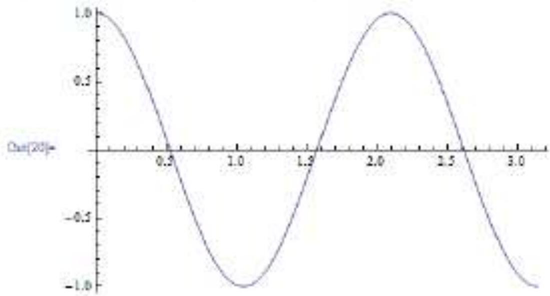
№	функції	№	функції
1	Sin 5t	6	$\sin x/\cos(x^2+y^2)$
2	Cos 3t	7	x sin x, cos x
3	Sin 3t,cos 5t	8	$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0$ x=1, x'=2 при t=0
4	Sin xy	9	$\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{d^2x}{dt^2}=0$ x=2, x'=0, x''=1 при t=0
5	Sin 1/(xy)	10	$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}=t^2$ x=0, x'=0 при t=0

Приклад розв'язку завдання №5

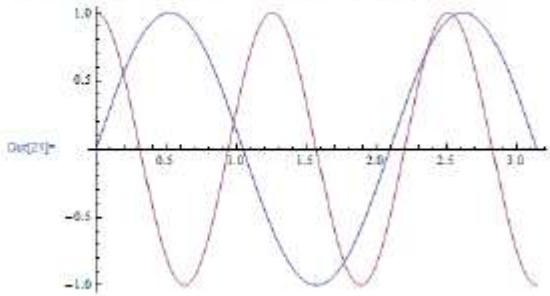
```
In[19]:= Plot[Sin[5 t], {t, 0, Pi}]
```



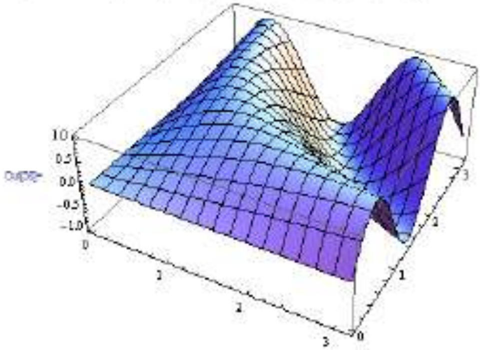

```
In[20]:= Plot[Cos[3 t], {t, 0, Pi}]
```



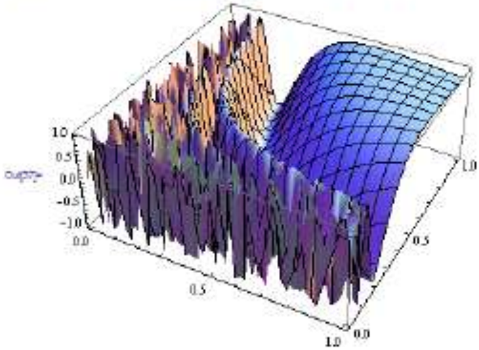

```
In[21]:= Plot[{Sin[3 t], Cos[5 t]}, {t, 0, Pi}]
```



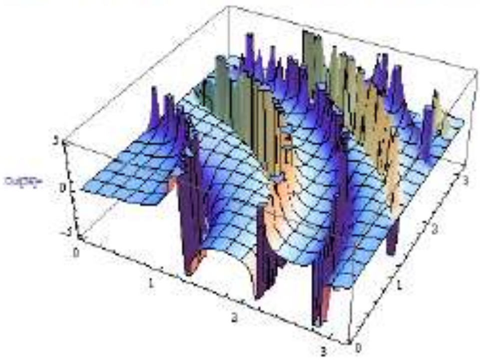
```
Plot3D[{Sin[x * y]}, {x, 0, Pi}, {y, 0, Pi}]
```



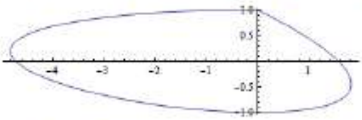

```
Plot3D[Sin[1 / (x y)], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]
```




```
Plot3D[Sin[x] / Cos[x^2 + y^2], {x, 0, Pi}, {y, 0, Pi}]
```



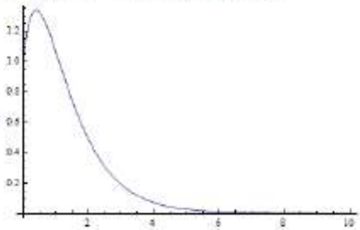
```
ParametricPlot[{x Sin[x], Cos[x]}, {x, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```




```
DSolve[{x''[t] + 3 x'[t] + 2 x[t] == 0, x[0] == 1, x'[0] == 2}, x[t], t]
```

$\{\{x[t] \to e^{-2t}(-3+4e^{t})\}\}$

$\text{Plot}[x[t] = e^{-2t}(-3+4e^{t}), \{t, 0, 10\}]$




```
DSolve[{x'''[t] - x''[t] == 0, x[0] == 2, x'[0] == 0, x''[0] == 1}, x[t], t]
```

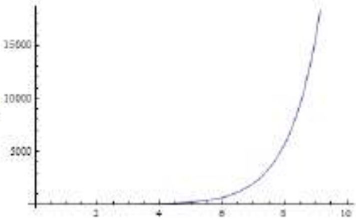
$\{\{x[t] \to 1 + e^{t} - t\}\}$

$\text{Plot}[x[t] = 1 + e^{t} - t, \{t, 0, 10\}]$


```
DSolve[{x''[t] - x'[t] == t^2, x[0] == 0, x'[0] == 0}, x[t], t]
```

$\{\{x[t] \to \frac{1}{3}(-6+6e^{t}-6t-3t^2-t^3)\}\}$

$\text{Plot}[x[t] = \frac{1}{3}(-6+6e^{t}-6t-3t^2-t^3), \{t, 0, 10\}]$



3. Завдання: скориставшись графічними можливостями програмного пакета одержати зображення функції.

№	Варіант						
	1	2	3	4	5	6	7
1	Sin 2x	Cos 2x	Tg 2x	Ctg 2x	Sin 3x	Cos 3x	Tg 3x
2	Cos 5x	Sin 5x	Ctg 5x	Tg 5x	Cos 4x	Sin 4x	Ctg 4x
3	Sin 5x, Cos 2x	Cos5x, Sin2x	Tg 5x, Ctg 5x	Ctg x, Tg 3x	Sin 4x, Cos 3x	Cos4x, Sin3x	Tg 7x, Ctg 6x
4	Cos xy	Tg xy	Ctg xy	Cos 2xy	Tg 2xy	Ctg 2xy	Sin 2xy
5	Cos 1/(xy)	Tg 1/(xy)	Ctg 1/(xy)	Sin 1/2(xy)	Cos 1/2(xy)	Tg 1/2(xy)	Ctg 1/2(xy)
6	$y''=\sin 5x$, якщо $y(0)=2$, $y'(0)=-1$	$y''=120x^4+4$, якщо $y(1)=-10$, $y'(1)=3$	$y''=-\frac{4}{x}y'+\frac{1}{x^6}$, якщо $y(-1)=\frac{1}{4}$, $y'(-1)=4$	$y''=-\frac{2}{y^5}$, якщо $y(-1)=1$, $y'(-1)=1$	$2xy''-y'=0$, якщо $y(4)=10$, $y'(4)=3$	$y''-2y'+1=0$, якщо $y(0)=2$, $y'(0)=7$	$y''-y'-6y=0$, якщо $y(0)=3$, $y'(0)=4$
7	$y'=x^2-y^2$; $y(-1)=0$	$y'=x^2+y^2$; $y(0)=0$.	$y'=x+y$; $y(0)=1$.	$y'=2y-2x^2-3$; $y(0)=2$	$xy'=2x-y$; $y(1)=2$.	$y'=x+y^2$; $y(0)=0$.	$y'+\frac{1}{x-1}y=0$; $y(0)=1$

Продовження таблиці

	8	9	10
1	Ctg 2x	Sin 3x	Cos 3x
2	Tg 5x	Cos 4x	Sin 4x
3	Ctg 3x, Tg x	Sin 4x, Cos 3x	Cos4x, Sin3x
4	Cos 1/3(xy)	Cos 1/3(xy)	Tg 1/3(xy)
5	$y' = x - y$; $y(0)=1$.	$y' = x^2y^2 - 1$; $y(0)=1$.	$y' = x^2 + y$; $y(0)=1$.
6	$y'' - 5y' + 6y = 0$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$	$y' - y = e^x$; $y(0)=1$	$y'' + y = \cos x$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$
7	$y' - 3x^2y - x^2e^{x^3} = 0$, якщо $y(0) = 0$	$(x+1)y' + y = x^3 + x^2$, якщо $y(0) = 0$	$y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 4x + 5$, якщо $y(-1) = \frac{3}{2}$
8	$y'' + 6y' + 34y = 0$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$	$y'' - 12y' + 36y = 0$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.	$y'' + 5y' - 6y = 0$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$

Завдання №6

Тема: «Елементи списків та матриць системи Mathematica».

Мета роботи: ознайомитися із властивостями списків та матриць системи Mathematica

1. Теоретичні відомості

Створення списків

Найбільш загальним видом складних даних в системі є списки (lists). їх також відносять до даних множинного типу [13, 26, 28]. списки представляють як сукупність однотипних або різнотипних даних, згрупованих за допомогогю фігурних дужок. наприклад:

{1, 2, 3} - список з трьох цілих чисел;

{A, b, c} - список з трьох символьних даних;

{1, a, x ^ 2} - список з різнотипних даних;

{{A, b}, {c, d}} - список, еквівалентний матриці;

{X ^ 2 + y ^ 2, 2 * Sin [x]} - список з двох математичних виразів.

За допомогою списків можна задавати більш звичні типи складних даних, наприклад, вектори - одномірні масиви даних, матриці - двовимірний масиви і багатовимірні масиви [30]. При цьому кожна група елементів багатомірних списків виділяється своєю парою фігурних дужок, а в цілому список виділяється загальними дужками. Уже в системах Mathematica 4/5 щільність упаковки великих списків (масивів) істотно підвищена, як і швидкість операцій з ними.

Можливо завдання списків в списку, наприклад:

{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}

Такий список представляє матрицю

Однак, щоб вивести список в такий матричної формі, необхідно викорис

зувати після списку вираз // MatrixForm.

Ще один спосіб завдання списку або матриці за допомогою функції List:

• List [a, b, c, ...] - створює список {a, b, c, ...};

• List [{a, b, c, ...}, {d, e, f, ...}, {i, k, l, ...}] - створює список - матрицю {{a, b, c, ...},

{D, e, f, ...}, {i, k, l, ...}}.

Списки можна складати безпосередньо, задаючи об'єкти відповідно до описаним синтаксисом. Однак можна і генерувати деякі види списків, таких як таблиці. Списки можуть бути об'єктами привласнення змінним, наприклад

V: = [1, 2, 3, 4, 5]

Зміна порядку елементів у списку

```
In[1]:= matrix = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}

Out[1]= {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}

In[2]:= matrix // MatrixForm

Out[2]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

```
In[3]:= List[{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}]

Out[3]= {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}}

In[4]:= % // MatrixForm

Out[4]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Списки характеризуються розміром, який представляє собою добуток числа елементів списків за кожним напрямом. Число напрямів нащивають розмірністю. Наприклад, одновимірний список є вектором і характеризуется числом елементів по єдиному напрямку. При цьому вектор може бути вектором-рядком і вектором-стовбцем. Двовимірний список представляє матрицю, що має m рядків і n стовпців. Її розмір m x n. Якщо m=n, матриця називається квадратною. Імена векторів і матриць у даній книзі

позначені зазвичай жирними символами, наприклад, для вектора V і M для матриці.

Генерація списків

Для генерації списків з елементами – дробовими та цілими числами або навіть цілими виразами – особливо часто використовується функція Table, що створює таблицю-список:

• Table[expr, {imax}] – генерує список, що містить imax примірників вираз expr.

• Table[expr, {i, imax}] – генерує список значень expr при i, що змінюється від 1 до imax.

• Table[expr, {i, imin, imax}] – починається зі значення i = imin.

• Table[expr, {i, imin, imax, di}] – використовує кроки di.

• Table[expr, {i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...] – повертає вкладений список. Самим зовнішнім є список по змінної i.

Нижче представлені приклади використання функції Table (перший рядок

кожного прикладу – введення, наступна – висновок).

Table [Exp [i], {5}] Генерація п'яти значень Ei

i i i i i

{E, E, E, E, E}

Table [Exp [i], {i, 1,5}] Генерація п'яти значень Ei

2 3 4 5 (i = 1,2,3,4 і 5)

{E, E, E, E, E}

Table [N [Exp [i]], {i, 0,2,0.5}] Генерація п'яти значень Ei

{1., 1.64872, 2.71828, 4.48169, 7.38906} в чисельному вигляді

Table [i * j, {i, 1,3}, {j, 1,3}] Генерація матриці

{{1, 2, 3}, {2, 4, 6}, {3, 6, 9}} розміром 3 x 3

Крім додавання в список нових даних є можливість зміни порядка розташування елементів у списку. Вона реалізується наступними операціями:

• Flatten[list] – вирівнює (перетворює в одновимірний) список з усіх його рівнів.

• Flatten[list,n] – вирівнює список за його ппуровням.

• Flatten[list, n, h] – вирівнює з заголовком h за його ппуровням.

• FlattenAt[list, n] – вирівнює подспісок, якщо він виявляється n-ним элементом списку list. Якщо n негативнt, позиція відраховується з кінця.

• Sort[list] – сортує елементи списку list в канонічному порядку.

• Sort[list, p] – сортує згідно функції впорядкування p.

• Reverse[list] – повертає список з зворотним порядком розташування

елементів.

• RotateLeft[list] – повертає список після одноразового повороту вліво.

• RotateLeft[list,n] – повертає список після n-кратного повороту вліво.

• RotateRight[list] – повертає список після одноразового повороту вправо.

• RotateRight[list,n] – повертає список після n-кратного повороту вправо.

• Transpose[list] – здійснює транспозицію (зміну рядків і стовпців)

для двовимірного списку.

• Transpose[list,n] – здійснює транспозицію n-вимірного списку. Таким чином, є великі можливості зміни струк

Комбінування списків і робота з множинами

Іноді виникає необхідність комбінування декількох списків. Для цього використовуються наступні функції:

• Complement[list,list1,list2,...] – повертає список list с елементами, які не містяться ні в одному зі списку list1, list2,....

• Intersection[list1, list2, ...] – (перетин множин) повертає впорядкований список елементів, загальних для всіх списків listi.

• Join[list1, list2, ...] – об'єднує списки в єдиний ланцюжок (виконує конкатенацію). Join може застосовуватися на будь-якому безліч виразів, що мають один заголовок.

• Union[list1,list2, ...] – видалити повторювані елементи списків і повертає відсортований список всіх розрізняються між собою элеменн

тів, що належать кожному з даних списків listi. Функція обеспечиваа

ет теоретикоомножественное об'єднання списків.

• Union[list] – повертає відсортований варіант списку list, в якому

опущені всі повторювані елементи.

Complement[{1,2,3,4,5},{1,a,2},{b,c,5}] {3, 4}

l1={1,2,3,4,5}; l2={a,b,3,4,c};

Intersection[l1,l2] {3, 4}

Join[l1,l2] {1,2,3,4,5,a,b,3,4,c}
Union[{1,2,4,3,2,7,3,5}] {1, 2, 3, 4, 5, 7}
Union[{3,2},{1,4}] {1, 2, 3, 4}
Union[{a,b,c,a},{1,d,3}] {1, 3, a, b, c, d}

Функції для операцій лінійної алгебри

Наступна група функцій системи Mathematica дозволяє здійснити основні операції над векторами і матрицями, що використовуються в лінійній алгебрі.

• Cross [v1, v2, v3, ...] - кросдобуток векторів (може задаватися у вигляді v1 * v2 * v3 * ...).

• Det [m] - повертає детермінант (визначник) квадратної матриці m.

• DiagonalMatrix [list] - повертає діагональну матрицю з головною діагоналлю, сформованою з елементів списку list, і нульовими іншими елементами матриці.

• Dot [a, b, c] - повертає добуток векторів, матриць і тензорів. операцію добутку можна задавати також і у вигляді a.b.c.

• Eigensystem [m] - повертає список {values, vectors} власних значень і власних векторів даної квадратної матриці m.

• Eigenvalues[m] - повертає список власних значень квадратної матриці m.

• Eigenvectors [m] - повертає список власних векторів квадратної матриці m.

• IdentityMatrix [n] - повертає одиничну матрицю з розміром nxn (у неї діагональні елементи мають значення 1, інші 0).

• Inverse [m] - повертає зворотну матрицю для квадратної матриці m, тобто матрицю m-1, яка, будучи помноженою на вихідну матрицю, дає одиничну матрицю.

• MatrixExp[m] – повертає експоненціал матриці m.

• MatrixPower[m, n] – повертає n□шу ступінь матриці m.

• MatrixQ[expr] – повертає True, якщо expr є списком списків, коо

який може представляти матрицю, інакше повертає False.

• MatrixQ[expr, test] – повертає True, тільки якщо test дає True примее

зміні до кожного елемента матриці в expr.

• Minors[m, k] – повертає матрицю, складену з визначників всіх кґк субматриц m.

• NullSpace[m] – повертає список векторів, які формують базис

для нульового простору матриці m.

• Pivoting – опція, що відноситься до функцій декомпозиції матриці; укаа

доводить, що повинен виконуватися поворот стовпця. Результат має форму

{Q,R,P}, де P – матриця перестановок така, що має місце M. P=Conjugate

[Transpose[Q]].R, де M – початкова (вихідна) матриця.

• PseudoInverse[m] – шукає псевдообратную квадратної матриці m.

• Tr[list] – повертає слід матриці або тензора (функція тільки у Mathee

matica 4).

• Traspose[m] – повертає транспоновану матрицю, у якій столбб

ці рядки міняються місцями, в порівнянні з матрицею m.

• RowReduce[m] – повертає приведену до рядку форму матриці m.

• ZeroTest – опція для LinearSolve та інших лінійних алгебраїчних функн

кцій; дає функцію для застосування її до сполучень (комбінацій) з

матричних елементів з метою визначення, слід чи ні вважати їх

рівними нулю.

A:=IdentityMatrix[3]

A {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

MatrixExp[A] {{E, 0, 0}, {0, E, 0}, {0, 0, E}}

MatrixQ[A] True

MatrixPower[MatrixExp[A],-1.5] {{0.22313, 0, 0},{0, 0.22313, 0},

{0, 0, 0.22313}}

A+{{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}} {{2, 2, 3}, {4, 6, 6}, {7, 8, 10}}

m:={{1,2},{3,7}}

MatrixForm[m] 1 2

3   7
Inverse[m] {{7, -2}, {-3, 1}}
MatrixQ[m] True
RowReduce[m] {{1, 0}, {0, 1}}

2. Виконання розрахунків на занятті

№	Початкові умови
1	Створити список i $i \in \{0,1\}$, $\Delta i=0.1$
2	Створити список A=i $i \in \{0,2\pi\}$, $\Delta i=\pi*10/180$
3	Визначити довжину попереднього списку
4	Створити список 5*i $i \in \{0,10\}$
5	Створити двовимірний масив M=a*b $a \in \{0,10\}$, $b \in \{0,10\}$
6	Представити масив M у матричній формі
7	Представити масив M у табличній формі
8	Створити з двовимірного масиву M одновимірний масив B
9	Представити зворотний порядок масиву B
10	Транспонувати матрицю M

In[1]:= Table[i, {i, 0, 1, 0.1}]

Out[1]= {0., 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.}

In[2]:= A = Table[i, {i, 0, 2 Pi, Pi * 10 / 180}]

Out[2]= $\left\{0, \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{9}, \frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{18}, \frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{9}, \frac{11\pi}{18}, \frac{2\pi}{3}, \frac{13\pi}{18}, \frac{7\pi}{9}, \frac{5\pi}{6}, \frac{8\pi}{9}, \frac{17\pi}{18}, \pi, \frac{19\pi}{18}, \frac{10\pi}{9}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{9}, \frac{23\pi}{18}, \frac{4\pi}{3}, \frac{25\pi}{18}, \frac{13\pi}{9}, \frac{3\pi}{2}, \frac{14\pi}{9}, \frac{29\pi}{18}, \frac{5\pi}{3}, \frac{31\pi}{18}, \frac{16\pi}{9}, \frac{11\pi}{6}, \frac{17\pi}{9}, \frac{35\pi}{18}, 2\pi\right\}$

In[3]:= Length[A]

Out[3]= 37

In[4]:= Table[5 * i, {i, 0, 10}]

Out[4]= {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}

In[5]:= M = Table[a * b, {a, 0, 10}, {b, 0, 10}]

Out[5]= {{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20},
{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30},
{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40},
{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50},
{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60},
{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70},
{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80},
{0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90},
{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100}}

In[6]:= MatrixForm[M]

Out[6]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 \\ 0 & 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 \\ 0 & 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 48 & 54 & 60 \\ 0 & 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 & 56 & 63 & 70 \\ 0 & 8 & 16 & 24 & 32 & 40 & 48 & 56 & 64 & 72 & 80 \\ 0 & 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 63 & 72 & 81 & 90 \\ 0 & 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \end{pmatrix}$$

```
In[7]:= TableForm[M]

Out[7]//TableForm=
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   1   2   3   4   5   6   7   8   9   10
0   2   4   6   8   10  12  14  16  18  20
0   3   6   9   12  15  18  21  24  27  30
0   4   8   12  16  20  24  28  32  36  40
0   5   10  15  20  25  30  35  40  45  50
0   6   12  18  24  30  36  42  48  54  60
0   7   14  21  28  35  42  49  56  63  70
0   8   16  24  32  40  48  56  64  72  80
0   9   18  27  36  45  54  63  72  81  90
0   10  20  30  40  50  60  70  80  90  100

In[8]:= B = Flatten[M]

Out[8]= {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 0, 2, 4, 6,
  8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 0, 4,
  8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45,
  50, 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42,
  49, 56, 63, 70, 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 0, 9, 18, 27,
  36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100}

In[9]:= Reverse[B]

Out[9]= {100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 0, 90, 81, 72, 63, 54, 45, 36, 27,
  18, 9, 0, 80, 72, 64, 56, 48, 40, 32, 24, 16, 8, 0, 70, 63, 56, 49, 42,
  35, 28, 21, 14, 7, 0, 60, 54, 48, 42, 36, 30, 24, 18, 12, 6, 0, 50, 45,
  40, 35, 30, 25, 20, 15, 10, 5, 0, 40, 36, 32, 28, 24, 20, 16, 12, 8, 4,
  0, 30, 27, 24, 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6,
  4, 2, 0, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

In[10]:= Transpose[M]

Out[10]= {{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20},
  {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30},
  {0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40},
  {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50},
  {0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60},
```

3. Завдання

Розв‘язати задачу для обчислення матриць засобами програмного середовища Mathematica

Написати розрахунок в середовищі Mathematica для обчислення матриць згідно завдання свого варіанту.

Варіанти

1. $C=(AA^T)^2-2B;$
де $A[3][3]$, $B[3][3]$.

2. $C=2AB-B^4;$
де $A[5][5]$, $B[5][5]$.

3. $C=A^2B-3B^2;$
де $A[7][7]$, $B[7][7]$.

4. $C=(B-5A)^2;$
де $A[8][3]$, $B[8][3]$.

5. $C=(A+9B)A^T;$
де $A[2][2]$, $B[2][2]$.

6. $C=3(A^TB-B)B;$
де $A[4][4]$, $B[4][4]$.

7. $C=2B+A^3;$
де $A[3][7]$, $B[3][7]$.

8. $C=A^3-B^2;$
де $A[5][3]$, $B[5][3]$.

9. $C=(AB-A^2B)^3;$
де $A[6][6]$, $B[6][6]$.

10. $C=5A^3-8B^2;$
де $A[7][2]$, $B[7][2]$.

11. $C=(A^TB-3B^2)B;$
де $A[2][2]$, $B[2][2]$.

12. $C=(AA^T)^3-2B;$
де $A[4][4]$, $B[4][4]$.

13. $C=4B^TA^2-B^3;$
де $A[5][5]$, $B[5][5]$.

14. $C=B-A^4$
де $A[3][8]$, $B[3][8]$.

15. $C=(2A+B)B^T;$
де $A[3][3]$, $B[3][3]$.

16. $C=(2B-A^4)^2;$
де $A[6][2]$, $B[6][2]$.

17. $C=8AB-AB^4;$
де $A[4][4]$, $B[4][8]$.

18. $C=(A^T-7B^2)A;$
де $A[5][5]$, $B[5][5]$.

19. $C=A^2A^T-4B;$
де $A[9][9]$, $B[9][9]$.

20. $C=(6A^T-B)B^3;$
де $A[6][6]$, $B[6][6]$.

21. $C = (A^T)^3 - 7B^2;$
де $A[2][2]$, $B[2][2]$.

22. $C = (A^T B^4 - 5B)B;$
де $A[4][4]$, $B[4][4]$.

23. $C = (4BA - B^2)^3;$
де $A[8][8]$, $B[8][8]$.

24. $C = B(B^T)^2 - 4A;$
де $A[3][3]$, $B[3][3]$.

25. $C = 3BAB - 2AB^2;$
де $A[10][10]$, $B[10][10]$.

26. $C = (4AB - A^2)^2;$
де $A[7][7]$, $B[7][7]$.

27. $C = (5B + A)^2;$
де $A[3][8]$, $B[3][8]$.

28. $C = AB^3 - A;$
де $A[5][5]$, $B[5][5]$.

29. $C = A^3 - B^2;$
де $A[4][10]$, $B[4][10]$.

30. $C = (BB^T)^2 - A;$
де $A[9][9]$, $B[9][9]$.

Приклад розв’язку В 30

```
In[5]:= Задаємо початкові матриці A[9][9], B[9][9];

In[8]:= A = 
( 1 2 3 4 5 6 7 8 9
  1 2 3 4 5 6 7 8 9
  1 2 3 4 5 6 7 8 9
  1 2 3 4 5 6 7 8 9
  1 2 3 4 5 6 7 8 9
  1 2 3 4 5 6 7 8 9
  1 2 3 4 5 6 7 8 9
  1 2 3 4 5 6 7 8 9
  1 2 3 4 5 6 7 8 9 )

Out[8]= {{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
  {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
  {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
  {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
  {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}}

In[9]:= B = 
( 9 8 7 6 5 4 3 2 1
  9 8 7 6 5 4 3 2 1
  9 8 7 6 5 4 3 2 1
  9 8 7 6 5 4 3 2 1
  9 8 7 6 5 4 3 2 1
  9 8 7 6 5 4 3 2 1
  9 8 7 6 5 4 3 2 1
  9 8 7 6 5 4 3 2 1
  9 8 7 6 5 4 3 2 1 )

Out[9]= {{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1},
  {9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}, {9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1},
  {9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}, {9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1},
  {9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}, {9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1},
  {9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}, {9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}}

In[4]:= Шукаємо транспоновану матрицю B;

In[21]:= BT = Transpose[B]

Out[21]= {{9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9},
  {8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8}, {7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7},
  {6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6}, {5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5},
  {4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4}, {3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3},
  {2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2}, {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}}
```

Знаходимо добуток матриці B та транспонованої матриці

```
In[24]:= F = Dot[B, BT]

Out[24]= {{285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285},
  {285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285},
  {285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285},
  {285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285},
  {285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285},
  {285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285},
  {285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285},
  {285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285},
  {285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285, 285}}
```

Знаходимо значення виразу

```
In[25]:= G = (F)^2 - A

Out[25]= {{81 224, 81 223, 81 222, 81 221, 81 220, 81 219, 81 218, 81 217, 81 216},
  {81 224, 81 223, 81 222, 81 221, 81 220, 81 219, 81 218, 81 217, 81 216},
  {81 224, 81 223, 81 222, 81 221, 81 220, 81 219, 81 218, 81 217, 81 216},
  {81 224, 81 223, 81 222, 81 221, 81 220, 81 219, 81 218, 81 217, 81 216},
  {81 224, 81 223, 81 222, 81 221, 81 220, 81 219, 81 218, 81 217, 81 216},
  {81 224, 81 223, 81 222, 81 221, 81 220, 81 219, 81 218, 81 217, 81 216},
  {81 224, 81 223, 81 222, 81 221, 81 220, 81 219, 81 218, 81 217, 81 216},
  {81 224, 81 223, 81 222, 81 221, 81 220, 81 219, 81 218, 81 217, 81 216},
  {81 224, 81 223, 81 222, 81 221, 81 220, 81 219, 81 218, 81 217, 81 216}}
```

Завдання №7

Тема: «Обчислення матриць засобами Excel».

Мета роботи: ознайомитися із властивостями матриць в програмі Excel

1. Теоретичні відомості

Матриця – математичний об’єкт, що записується у вигляді прямокутної таблиці чисел і припускає такі алгебраїчні операції (додавання, віднімання, множення та ін.) між ними та іншими подібними об’єктами.

Означення 1. *Матрицею* розміром $(m \times n)$ називається прямокутна таблиця чисел, що містить m рядків и n стовпців. Числа, які утворюють матрицю, називають *елементами матриці*.

Матриці прийнято позначати великими буквами, а саму таблицю чисел поміщати у душки

Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 4 & -1 & 0.7 \end{pmatrix},$$

де - A матриця розміром 2×3.

Елементи матриці можуть бути позначені малими літерами, тоді ця літера позначається двома індексами. Наприклад , матрицю розміром $(m \times n)$, можна записати:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (2.1)$$

a_{ij} - цей запис показує, що елемент знаходиться у рядку з номером i і стовпчику з номером j, тобто *перший* індекс вказує на *номер рядка*, а *другий* - *номер стовпчика*.

Наприклад в матриці:

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & -4 & 0.7 & 0 \\ 0.2 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

де $b_{32}=\sqrt{2}$, $b_{24}=0$.

<u>Основні типи матриць:</u>

- якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпчиків, тоді матриця називається *<u>квадратною</u>*;

- якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, тоді матриця називається *<u>нульовою</u>*. Нульова матриця позначається цифрою 0. Як правило, з контексту видно, виявляється цей 0 числом або матрицею;

- квадратна матриця, у якої всі елементи не головної діагоналі дорівнюють нулю, називається *<u>діагональною</u>*, (сукупність елементів матриці, які розташовані на відрізку, що з'єднує верхній кут з нижнім, називають *головною діагоналлю* матриці);

- квадратна матриця називається *<u>верхньою трикутною</u>* (*<u>нижньою трикутною</u>*), якщо всі її елементи, які стоять нижче (вище) головної діагоналі, дорівнюють нулю, (верхня трикутна матриця іноді називається *правою трикутною*, а нижня трикутна – *лівою трикутною*);

- *<u>одиничною матрицею</u>* називається діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1, (для позначення одиничної матриці зазвичай використовують літеру *E*);

- дві матриці називаються *<u>рівними</u>*, якщо вони мають однакові розміри і елементи, що знаходяться на однакових місцях, дорівнюють один одному.

<u>Додавання матриць та множення на число</u>

Додавання визначено тільки для матриць однакових розмірів.

Означення 2. *Сумою матриць* A і B розмірів $(m\times n)$, є матриця C такого ж розміру , у якій

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \tag{2.2}$$

де $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$.

Іншими словами, при додаванні матриць, додаються елементи, які знаходяться на однакових місцях.

Наприклад:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Означення 3. *Добутком матриці* A розміром $(m \times n)$ *на число* α називається матриця C такого ж розміру, у якій

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \qquad (2.3)$$

де $i = 1,2,...,m$, $\quad j = 1,2,...,n.$

Іншими словами, при множенні матриці на число всі її елементи множаться на це число.

Наприклад:

$$3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -12 & 15 \end{pmatrix}.$$

Означення 4. Операцію *віднімання матриць* можна визначити наступним чином: $A - B = A + (-1)B$, що відповідає відніманню елементів, які знаходяться на однакових місцях.

Використовуючи операції додавання і множення, можемо знаходити лінійні комбінації матриць, тобто є вирази виду

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_k A_k, \qquad (2.4)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ - числа, $A_1, A_2, ..., A_k$ - матриці однакових розмірів.

Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Знайдемо $3A - 2B$:

$$3A - 2B = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ -3 & 12 & 3 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -10 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 13 & 6 \\ 7 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

Легко перевірити, що операції додавання матриць і множення матриці на число, які називають *лінійними* операціями, мають наступні властивості:

1. $A+B=B+A$ - властивість комутативності;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ - властивість асоціативності;
3. $A+0=A$;
4. $A+(-A)=0$;
5. $\alpha(A+B)+\alpha A+\alpha B$ - властивість дистрибутивності;
6. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
7. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;
8. $1\times A=A$;

де A,B,C - матриці, α,β - числа, 0 – нульова матриця.

Множення матриць

Означення 5 *Добуток матриці* A розміром $(m\times n)$ на матрицю B розміром $n\times k$ називається матриця C розмірів $m\times k$, елементи якої вираховуються за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}, \qquad (2.5)$$

де $i=1,...,m \quad j=1,...,k$.

Насамперед, в цьому виразі потрібно звернути увагу, на важливість порядку множників, потрібно знати, який множник перший, а який - другий.

По-друге, потрібно відмітити, що добуток визначено тільки в тому випадку, якщо кількість стовпців першого множника дорівнює кількості рядків другого. Якщо ця умова не виконується, тоді добуток не визначений.

По-третє, розміри результату множення визначають наступним чином: кількість рядків результату дорівнює кількості рядків першого множника, а кількість стовпців результату дорівнює кількості стовпців другого множника.

Для того, щоб вирахувати елемент добутку, який знаходиться в i-ом рядку і j-ом стовпчику, потрібно i-ий рядок першого множника і j-ий стовпець другого множника, попарно помножити їх елементи, що знаходяться на однакових місцях, і результати додати.

Наприклад, знайти добуток AB і BA:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 0\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\\ 4 & -3\end{pmatrix}.$$

Розглянемо добуток AB. Кількість стовпців у першого множника (A) дорівнює 3, кількість рядків у другого множника, також = 3. Числа співпали, тому, добуток визначено.

Результатом множення буде матриця C, $C=AB$, у якій кількість рядків така , яка і у першого множника, тобто 3, а стовпців стільки, скільки їх у другого множника, тобто 2. Тоді матриця C буде мати розміри 3×2.

Знаходимо елемент c_{11}. При його розрахунку використовуємо перший рядок (1 2 -1) першого множника (A) і перший стовпець $\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$ другого множника (B): $c_{11}=1\cdot 3+2\cdot 1+(-1)\cdot 4=1$.

Знаходимо елемент c_{12}. Використовуємо перший рядок (1 2 -1) першого множника (A) і другий стовпець $\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ -3\end{pmatrix}$ другого множника (B): $c_{12}=1\cdot(-2)+2\cdot 0+(-1)\cdot(-3)=1.$

Всі елементи першого рядка матриці C вирахувані.

Знайдемо елемент c_{21}. При його розрахунках приймає участь другий рядок (3 4 1) першого множника (A) і перший стовпець $\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$ другого множника (B): $c_{21}=3\cdot 3+4\cdot 1+0\cdot 4=13.$

Знайдемо елемент c_{22}. Використовуємо другий рядок (3 4 0) першого множника (A) і другий стовпець $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ другого множника (B): $c_{22} = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) = -6.$

Розраховані всі елементи другого рядка матриці C.

Аналогічно знаходимо елементи третього рядка:

$$c_{31} = (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 = -9,$$

$$c_{32} = (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-3) = 8.$$

Тоді,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 13 & -6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо добуток BA. Кількість стовпців в першому множнику (B) дорівнює 2, кількість у другому множнику (A) дорівнює 3. Кількість не співпала, тому, добуток не визначений.

Відповідь:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 13 & -6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix},$$

де добуток BA не визначений.

Транспонування матриці

Означення 6. Нехай A - матриця розміром $m \times n$. Тоді *транспонованою* матрицею A називається така матриця B розмірів $n \times m$,

$$b_{ij} = a_{ji}, \qquad (2.6)$$

де $i = 1,...,n$, $j = 1,...,m.$

Транспонована матриця A *позначається* A^T *або* ${}^tA$. Операція транспонування заключається в тому, що рядки і стовпці вихідної матриці міняються ролями. В транспонованій матриці перший стовпець служить першим рядком у вихідній матриці, другим стовпцем – другий рядок вихідної матриці і т.п.

Наприклад,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix},\quad B^T=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\end{pmatrix}.$$

Операції, які можуть бути виконані:

- $\left(A^T\right)^T=A$,
- $(A+B)^T=A^T+B^T$,
- $(\alpha A)^T=\alpha\left(A^T\right)$,

де α - число.

Якщо добуток AB визначено, тоді $(AB)^T=B^T\cdot A^T$.

Нехай A - матриця розмірів $m\times n$, B - матриця розмірів $n\times k$. Тоді A^T має розміри $n\times m$, а B^T - розміри $k\times n$. Кількість стовпців у B^T співпадає з кількістю рядків в A^T, тому добуток B^T на A^T визначено. Розміри цього добутку $k\times m$. Матриця AB має розміри $m\times k$, тому $(AB)^T$ - матриця розмірів $k\times m$.

Обернена матриця

Означення 7. Матриця B називається *оберненою матрицею* для квадратної матриці A, якщо $AB=BA=E$.

З визначення випливає, що обернена матриця B, буде квадратною матрицею того ж порядку, що і матриця A (інакше одне з добутків AB або BA буде не визначено).

Означення 8. *Обернена матриця для матриці* A позначається A^{-1}. Таким чином, якщо A^{-1} існує, тоді $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Тоді, з визначення оберненої матриці випливає, що матриця A є оберненою для матриці A^{-1}, тобто $(A^{-1})^{-1}=A$. Про матриці

A і A^{-1} можна говорити, що вони обернені одна одній або взаємнообернені.

Якщо матриця A має обернену, тоді $|A| \neq 0$ $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

Так як визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників, тоді $\left|AA^{-1}\right| = |A|\left|A^{-1}\right| = E$.

$|E| = 1$, тому $|A|\left|A^{-1}\right| = 1$, що не можливо при $|A| = 0$. Із попередньої рівності випливає $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

Якщо визначник матриці дорівнює нулю, тоді обернена до неї не існує.

Квадратна матриця A називається особливою, якщо $|A| = 0$, і не особливою, якщо $|A| \neq 0$. Якщо обернена матриця існує, тоді вона єдина.

Якщо квадратна матриця A є не особливою, тоді обернена для неї існує.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2.7)$$

де A_{ij} - алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij}.

Наприклад, знайдемо обернену матрицю для матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Знайдемо визначник:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

.

Так як $|A| \neq 0$, тоді матриця A не особлива, і обернена для неї існує.

Знаходимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 13,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10,$$

Складаємо обернену матрицю так, щоб перший індекс відповідав стовпцю, а другий – рядку.

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -5 & 1 & -2 \\ 13 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Найточніше, відповідь треба записати так:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{4}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{13}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{10}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{13}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Обчисленя матриць у Microsoft Excel

Табличний процесор MS Excel містить великий набір математичних функцій які використовуються для різноманітних обчислень. Розглянемо декілька функцій для роботи з матрицями:

- МУМНОЖ - добуток матриць;
- ТРАНСП - транспонування матриці;
- МОПРЕД - обчислення визначника матриці;
- МОБР - обчислення оберненої матриці.

Розглянемо функцію множення матриць МУМНОЖ**.** Ця функція повертає добуток матриць (матриця зберігається в масивах). Результатом є масив з таким же числом рядків, як в масиві 1 і з таким же числом стовпців, як масив 2.

Синтаксис: МУМНОЖ(масив1;масив2)**,** де масив 1, масив 2 – масиви, що перемножуються.

Зауваження:

- кількість стовпців аргументу масиву 1 повинна бути такою ж, як кількість рядків аргументу масиву 2, і обидва масиви повинні містити тільки числа;

- масив 1 і масив 2 можуть бути задані як інтервали, масиви констант або посилання;

- якщо, хоча б одна комірка в аргументах порожня або містить текст, або якщо число стовпців в аргументі масиву 1 відрізняється від числа рядків в аргументі масиву 2, то функція МУМНОЖ повертає значення помилки #ЗНАЧ!.

2. Виконання розрахунків на занятті

Приклад**:** В комірки D9:E10 введена матриця А, а в комірки F9:G10 -матриця В, Потрібно в комірках H9:I10 отримати результат добутку матриць А·В.

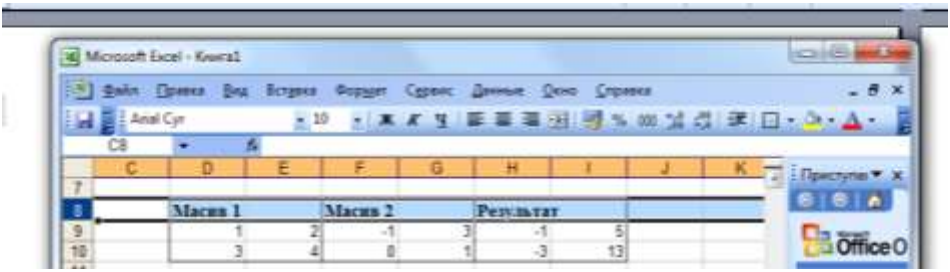
Рішення*:*

- виділяємо діапазон комірок, де повинен бути отриманий результат добутку -H9:I10;

- в рядок формул, або користуючись майстром функцій вводимо наступну формулу: =МУМНОЖ(D9:E10;F9:G10);

- потім натискаємо комбінацію клавіш CTRL+SHIFT+ENTER.

Таблиця 1



3 Завдання

Розв‘язати задачу для обчислення матриць засобами програмного середовища Mathematica та засобами Microsoft Excel

Написати розрахунок засобами Microsoft Excel для обчислення матриць згідно завдання свого варіанту.

Варіанти

1. $C=(AA^T)^2-2B;$ де $A[3][3]$, $B[3][3]$.	2. $C=2AB-B^4;$ де $A[5][5]$, $B[5][5]$.
3. $C=A^2B-3B^2;$ де $A[7][7]$, $B[7][7]$.	4. $C=(B-5A)^2;$ де $A[8][3]$, $B[8][3]$.

5. $C=(A+9B)A^T;$ де $A[2][2]$, $B[2][2]$.	6. $C=3(A^TB-B)B;$ де $A[4][4]$, $B[4][4]$.
7. $C=2B+A^3;$ де $A[3][7]$, $B[3][7]$.	8. $C=A^3-B^2;$ де $A[5][3]$, $B[5][3]$.
9. $C=(AB-A^2B)^3;$ де $A[6][6]$, $B[6][6]$.	10. $C=5A^3-8B^2;$ де $A[7][2]$, $B[7][2]$.
11. $C=(A^TB-3B^2)B;$ де $A[2][2]$, $B[2][2]$.	12. $C=(AA^T)^3-2B;$ де $A[4][4]$, $B[4][4]$.
13. $C=4B^TA^2-B^3;$ де $A[5][5]$, $B[5][5]$.	14. $C=B-A^4$ де $A[3][8]$, $B[3][8]$.
15. $C=(2A+B)B^T;$ де $A[3][3]$, $B[3][3]$.	16. $C=(2B-A^4)^2;$ де $A[6][2]$, $B[6][2]$.
17. $C=8AB-AB^4;$ де $A[4][4]$, $B[4][8]$.	18. $C=(A^T-7B^2)A;$ де $A[5][5]$, $B[5][5]$.
19. $C=A^2A^T-4B;$ де $A[9][9]$, $B[9][9]$.	20. $C=(6A^T-B)B^3;$ де $A[6][6]$, $B[6][6]$.
21. $C=(A^T)^3-7B^2;$ де $A[2][2]$, $B[2][2]$.	22. $C=(A^TB^4-5B)B;$ де $A[4][4]$, $B[4][4]$.
23. $C=(4BA-B^2)^3;$ де $A[8][8]$, $B[8][8]$.	24. $C=B(B^T)^2-4A;$ де $A[3][3]$, $B[3][3]$.
25. $C=3BAB-2AB^2;$ де $A[10][10]$, $B[10][10]$.	26. $C=(4AB-A^2)^2;$ де $A[7][7]$, $B[7][7]$.

27. $C = (5B + A)^2;$ де $A[3][8]$, $B[3][8]$.	28. $C = AB^3 - A;$ де $A[5][5]$, $B[5][5]$.
29. $C = A^3 - B^2;$ де $A[4][10]$, $B[4][10]$.	30. $C = (BB^T)^2 - A;$ де $A[9][9]$, $B[9][9]$.

Завдання №8

Тема: «Повне дослідження функції та побудова її графіка».

Мета роботи: провести повне дослідження системи і побудувати її графіка.

1. Теоретичні відомості

Функціональна залежність

Часто буває так, що одна змінна величина залежить від іншої: кожна зміна значення однієї величини призводить до відповідної зміни значення іншої. Якщо дві змінні величини пов‘язані між собою так, що кожному значенню однієї з них відповідає певне визначене значення іншої, то говорять, що між цими змінними існує функціональна залежність.

Приклади функціональної залежності.

Радіус кола та його довжина, вага покупки та її вартість, маса тіла та сила тяжіння, що діє на нього.

Область визначення та область значень функції

Область визначення функції – це всі значення, які може приймати аргумент (змінна х).

Область значень функції - це всі значення, які може приймати функція (змінна у) при всіх х із області визначення функції.

Приклад.

Якщо функція — многочлен, то вона існує при будь-яких значеннях аргумента, тобто її область визначення — всі дійсні числа.

Якщо функція задана формулою, яка містить аргумент у знаменнику дробу, то до області визначення функції входять всі дійсні числа, крім тих, які перетворюють знаменник в нуль.

Якщо функція задана формулою, яка містить арифметичний квадратний корінь, то до області її визначення входять всі дійсні числа, при яких підкореневий вираз набуває невід'ємних значень.

Аргумент і функція

Якщо дві змінні величини знаходяться у функціональній залежності, то та з них, яка може набувати довільних значень, називається незалежною змінною, або аргументом. Інша величина, значення якої залежать від значень аргументу, називається залежною змінною, або функцією.

Приклади. Площа квадрата є функцією довжини його сторони, шлях, пройдений поїздом, – функцією часу.

Якщо величина y є функцією величини x , то записують $y = f(x)$. Для позначення функціональної залежності застосовують й інші букви. Наприклад, якщо v є функцією t , можна записати і так: $v = \varphi(t)$.

Способи задання функцій

1. Аналітичний спосіб

Функція задається формулою, яка показує, яким чином за даним значенням аргументу можна обчислити відповідне значення функції.

Приклад. Залежність об‘єму куба V від довжини його ребра a можна виразити формулою $V = a^3$.

2. Табличний спосіб

Вказується значення аргументу і відповідне значення функції. Наприклад, таблиці квадратів, кубів, квадратних коренів.

3. Графічний спосіб

Будують графік залежності функції від її аргументу.

Парність та непарність функції

Функція називається парною, якщо будь-яким протилежним значенням аргументу відповідають рівні значення функції. Тобто, якщо для будь-яких x

$$f(-x) = f(x), \tag{1.1}$$

то функція $f(x)$ називається парною.

Приклад. Функція $y = x^2$ - парна, оскільки при будь-яких x

$$(-x)^2 = x^2 \tag{1.2}$$

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат (вертикальної осі).

Якщо будь-яким протилежним значенням аргументу відповідають протилежні значення функції, то така функція називається непарною. Тобто функція $f(x)$ називається непарною, якщо при будь-яких значеннях x

$$f(-x) = -f(x). \tag{1.3}$$

Приклад. Функція $y = x^3$ - непарна, оскільки при будь-яких x

$$(-x)^3 = -x^3 . \quad (1.4)$$

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Періодичність та неперіодичність функції

Функція $f(x)$ періодична, якщо при будь-яких x

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x), \quad (1.5)$$

де $T = const$ - період функції.

Приклад. Функції $y = \mathbf{cos}(x)$ та $y = \mathbf{sin}(x)$ мають період $T = 2\pi$; функції $y = tg(x)$ та $y = ctg(x)$ мають період $T = \pi$.

Якщо функція $f(x)$ періодична з періодом T, то функція $A \cdot f(k \cdot x + b)$, де A, b - числа і $k \neq 0$, також періодична з періодом

$$T_2 = \frac{T}{|k|} . \quad (1.6)$$

Точки перетину графіка функції з осями координат

Точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю абсцис (віссю OX): $A_i\left(x_i \pm T \cdot n; \quad 0\right)$, де $T = const$ - період функції (якщо функція неперіодична, то $T = 0$), $n \in Z$, Z - множина всіх цілих чисел;

Точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю ординат (віссю OY): $B_j\left(0; \quad y_j\right)$, де $i \in N$, $j \in N$, N - множина натуральних чисел.

Приклад. Визначимо точки перетину з осями координат функції $y = \mathbf{sin}(x)$.

Точки перетину графіка функції $y = \mathbf{sin}(x)$ з віссю OX:

$\mathbf{sin}(x) = 0$;

$x = \pm 2 \cdot \pi \cdot n$, де $n \in Z$, $T = 2 \cdot \pi \cdot n$ - період функції.

Отже, точки перетину графіка функції $y = \mathbf{sin}(x)$ з віссю OX: $A(\pm 2 \cdot \pi \cdot n; \quad 0)$.

Точки перетину графіка функції $y = \mathbf{sin}(x)$ з віссю OY:

$y = \sin(0)$;

$y = 0$.

Отже, існує одна точка перетину графіка функції $y = \sin(x)$ з віссю OY – точка $B(0;\quad 0)$.

Неперервні та розривні функції, точки розриву

Означення 1.1. Функція $y = f(x)$, визначена в околі точки $x = x_0$, є неперервною в точці x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу Δx відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta f(x_0)$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{1.7}$$

Означення 1.2. Нехай функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0. Функцію $f(x)$ називають неперервною в точці x_0, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1.8}$$

Означення 1.3. Функція, визначена в околі точки x_0, називається неперервною в точці x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що нерівність

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon, \tag{1.9}$$

виконується для всіх x, які задовольняють умову

$$\left| x - x_0 \right| < \delta(\varepsilon). \tag{1.10}$$

Тобто точки графіка $y = f(x)$ будуть як завгодно близькими до точки $A(x_0;\quad f(x_0))$, як тільки їх абсциси достатньо мало відрізнятимуться від x_0.

Будь-яка елементарна функція неперервна у кожній точці своєї області визначення.

Функція називається неперервною на інтервалі $(a;b)$, якщо вона неперервна у кожній точці цього інтервалу.

Теорема 1.1. Для того, щоб функція була неперервною в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною в точці x_0 зліва і справа. Отже, умова неперервності має вигляд:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \qquad (1.11)$$

Якщо функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0 і не є неперервною у точці x_0, то цю точку називають точкою розриву функції.

Точки розриву функції класифікуються залежно від того, як саме порушується умова неперервності функції (1.11).

1. Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має скінченну границю справа і зліва і вони дорівнюють одна одній, але не дорівнюють значенню функції $f(x_0)$ або значення функції $f(x_0)$ не існує, то точка x_0 - точка усувного розриву.

Приклад. Для функції $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ точка $x_0 = 0$ є точкою усувного розриву. Точка усувного розриву пов‘язана з тим, що досить змінити значення функції або визначити її тільки в одній точці x_0, поклавши $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, щоб отримати функцію, неперервну в точці x_0.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ - перша визначна границя, тому

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & при \quad x \neq 0, \\ 1, & при \quad x = 0. \end{cases}$$

2. Якщо функція $f(x)$ має скінченну границю зліва і справа, причому

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

то точку x_0 називають точкою розриву зі скінченним стрибком.

Точки усувного розриву та точки розриву функції зі скінченним стрибком називаються точками розриву першого роду. У кожній з них функція має скінченну границю як справа, так і зліва.

3. Решту точок розриву називають точками розриву другого роду. Кожна точка розриву другого роду характеризується тим, що в ній немає хоча б однієї з односторонніх границь.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=(1+x)^{1/x}$.

Область визначення функції: $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to\pm 0}(1+x)^{1/x}=e$, то $x=0$ - точка усувного розриву.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=\begin{cases} 2\cdot x^2, & x\le 1, \\ \dfrac{-3x+9}{2}, & x>1. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} 2\cdot x^2=2;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{-3x+9}{2}=3;$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$, то точка $x=1$ - точка розриву зі скінченним стрибком.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$.

Область визначення функції: $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0} 2^{1/x}=0;$$

$$\lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0} 2^{1/x}=+\infty.$$

Оскільки у точці $x=0$ визначена лише одна границя зліва, то дана точка є точкою розриву другого роду.

Означення 1.4. Функція $f(x)$ визначена в околі X точки x_0. Функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}\subset X$, збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збіжна до числа $f(x_0)$.

Властивості функції, неперервної на відрізку

1. Будь-яка неперервна на відрізку функція обмежена. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найбільше і найменше.

2. Функція, неперервна на відрізку $[a;b]$, приймає на цьому відрізку всі проміжні між мінімальним і максимальним значення.

3. Теорема 1.2 Больцмана-Коші.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $x \in [a;b]$, і на його кінцях $x = a$ та $x = b$ функція приймає значення різних знаків, то існує хоча б одна точка $C \in (a;b)$, в якій значення функції дорівнює нулю - $f(x_C) = 0$.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $x \in [a;b]$ і $f(a) \neq f(b)$, то для будь-якого числа A, яке міститься між $f(a)$ і $f(b)$, існує точка $C \in (a;b)$ така, що $f(x_C) = A$.

Проміжки зростання і спадання функції

Для того, щоб визначити проміжки зростання і спадання функції, необхідно спочатку визначити її першу похідну.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в області $D(y)$. Візьмемо довільне число x_0 і надамо йому приросту Δx. Тоді $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Похідна функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ визначається за формулою:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1.12)$$

Вираз $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ повинен прямувати при $\Delta x \to 0$ до однієї і тієї ж границі, незалежно від того, яким чином $\Delta x \to 0$ - справа чи зліва.

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1.13)$$

Похідна $y'(x)$ є новою функцією від x, визначеною на множині $D(y)$.

З точки зору механіки, похідна виражає собою швидкість зміни функції $f(x)$. Закон руху точки задається функцією $S = f(t) = v \cdot t$, де S - переміщення, v - швидкість руху точки, t - час. Похідна від переміщення точки за часом є швидкістю цієї точки:

$$S'(t)=v(t)\,. \tag{1.14}$$

<u>З точки зору геометрії</u>, похідна $y'(x_0)$ чисельно дорівнює тангенсу кута α, утвореного дотичною до графіка функції $y=f(x)$ у точці $M(x_0;y_0)$ з додатнім напрямком осі OX.

$$k=y'(x_0)=tg\alpha\,. \tag{1.15}$$

Пряма, що проходить через точку дотику перпендикулярно до дотичної, називається нормаллю, рівняння якої можна представити виразом:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)\,. \tag{1.16}$$

Теорема 1.3. Якщо функція $y=f(x)$ диференційована у точці $x=x_0$, тобто у точці $x=x_0$ існує похідна $y'(x_0)$, то функція $y=f(x)$ неперервна у точці $x=x_0$.

Обернене твердження не вірне. Наприклад, функція $y=|x|$ є неперервною у точці $x=0$, але похідної у даній точці не існує, оскільки

$$\lim_{\Delta x\to -0}|x|=-1\,;\qquad \lim_{\Delta x\to +0}|x|=1\,;$$

$$\lim_{\Delta x\to -0}|x|\neq \lim_{\Delta x\to +0}|x|\,.$$

Тобто у точці $x=0$ не справджується умова існування похідної (1.13).

Означення 1.5. Якщо функція $f(x)$ така, що більшому значенню x відповідає більше значення функції, то функція $f(x)$ - зростаюча. Якщо функція $f(x)$ така, що більшому значенню x відповідає менше значення функції, то функція $f(x)$ - спадаюча.

Якщо $\Delta x=x_2-x_1$ і $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$, то згідно з означенням 1.5:

- для зростаючої функції $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$;
- для спадаючої функції $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}<0$.

Теорема 1.4. Необхідна умова зростання функції.

Якщо функція $f(x)$, що має похідну $f'(x)$ на відрізку $[a;b]$, зростає на цьому відрізку, то похідна $f'(x)$ не від‘ємна на відрізку $[a;b]$.

Для зростаючої функції $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Переходячи до границі, маємо:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, тому $f'(x) \geq 0$.

З геометричної точки зору, якщо на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ зростає, то дотична до кривої $y = f(x)$ у кожній точці відрізка $[a;b]$ утворює з додатною піввіссю OX гострий кут α_x або в окремих точках горизонталь. Тому для $\alpha_x \geq 0$ $f'(x) = tg(\alpha_x) \geq 0$.

Теорема 1.5. Достатня умова зростання функції.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована на інтервалі $(a;b)$, причому $f'(x) \geq 0$ для $a < x < b$, то функція $f(x)$ зростає на відрізку $[a;b]$.

Теорема 1.6. Достатня умова спадання функції.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована на інтервалі $(a;b)$, причому $f'(x) < 0$ для $a < x < b$, то функція $f(x)$ спадає на відрізку $[a;b]$.

Теорема 1.7. Якщо функція $f(x)$ зростає на відрізку $[a;b]$ (на інтервалі $(a;b)$), то її похідна $f'(x) \geq 0$ на цьому відрізку (інтервалі). Якщо функція $f(x)$ спадає на відрізку $[a;b]$ (на інтервалі $(a;b)$), то її похідна $f'(x) < 0$ на цьому відрізку (інтервалі).

Екстремуми функції

Функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_1$ максимум, якщо існує такий окіл цієї точки, що для всіх x цього околу має місце нерівність $f(x) < f(x_1)$.

Функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_2$ мінімум, якщо для деякого проміжку, що включає точку $x = x_2$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x)$.

Означення 1.6. Максимуми і мінімуми функції – екстремуми цієї функції.

Теорема 1.8. Необхідна умова існування екстремуму.

Якщо диференційована функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ екстремум, то її похідна в точці $x = x_0$ дорівнює нулю. <u>Обернена теорема не справедлива.</u>

Функція $f(x)$ може мати екстремум у точках, в яких:

- $f'(x) = 0$;
- $f'(x)$ не існує.

Якщо похідна $f'(x)$ не існує у деякій точці, але існує у прилеглих точках, то у цій точці похідна $f'(x)$ має розрив. Точки, в яких похідна дорівнює нулю ($f'(x) = 0$) або не існує, – критичні точки першого роду.

Теорема 1.9. Достатня умова існування екстремуму.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі, що містить точку x_1, і диференційована в усіх точках інтервалу, крім, можливо, точки x_1. Якщо при переході зліва направо через точку x_1 похідна $f'(x)$ змінює свій знак з “+” на “-“, то при $x = x_1$ функція $f(x)$ має максимум. Якщо при переході зліва направо через точку x_1 похідна $f'(x)$ змінює свій знак з “-” на “+“, то при $x = x_1$ функція $f(x)$ має мінімум.

Теорема 1.10. Достатня умова існування екстремуму.

Нехай в точці $x = x_1$ перша похідна функції дорівнює нулю ($f'(x) = 0$), а друга похідна функції не дорівнює нулю ($f''(x) \neq 0$).

- Якщо в точці $x = x_1$ $f'(x) = 0$ і $f''(x) < 0$, то у цій точці функція має максимум.
- Якщо в точці $x = x_1$ $f'(x) = 0$ і $f''(x) > 0$, то у цій точці функція має мінімум.
- Якщо в точці $x = x_1$ $f'(x) = 0$ і $f''(x) = 0$, то не відомо, чи має функція у даній точці екстремум.

Проміжки опуклості та ввігнутості, точки перегину графіка функції

Графік функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ опуклий, якщо він лежить нижче будь-якої дотичної, проведеної до графіка функції на інтервалі $(a;b)$.

Графік функції $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ ввігнутий, якщо він лежить вище будь-якої дотичної, проведеної до графіка функції на інтервалі $(a;b)$.

Точка, яка відокремлює опуклу частину графіка функції від ввігнутої, – точка перегину.

Теорема 1.11. Достатні умови опуклості та ввігнутості графіка функції.

Нехай існує друга похідна $f''(x)$ функції $f(x)$ при будь якому $x \in (a;b)$. Тоді, якщо $f''(x) < 0$, то графік функції на інтервалі $(a;b)$ опуклий. Якщо $f''(x) > 0$, то графік функції на інтервалі $(a;b)$ ввігнутий.

Теорема 1.12. Достатня ознака існування точки перегину графіка функції.

Якщо у точці $x = x_0$ друга похідна функції дорівнює нулю ($f''(x_0) = 0$) або не існує і при переході через точку x_0 змінює свій знак, то точка $x = x_0$ є точкою перегину графіка функції $f(x)$.

Теорема 1.13. Необхідна умова існування точки перегину графіка функції.

Нехай функція $y = f(x)$ має другу похідну для $x \in (a;b)$. Тоді, якщо точка $x_0 \in (a;b)$ є точкою перегину, то друга похідна функції рівна нулю ($f''(x_0) = 0$) або не існує

Точки, в яких $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує, – критичні точки другого роду.

2. Виконання розрахунків на занятті

Приклад. Визначити проміжки зростання і спадання, опуклості та ввігнутості, точки екстремуму, критичні точки першого і другого роду, точки перегину функції $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$.

Область визначення функції є вся множина дійсних чисел - $D(y)=R$.

Перша похідна функції $y=f(x)$: $y'(x)=x^2-3x+2$.

Визначимо, при яких x похідна функції рівна нулю:

$y'(x)=0$; $\quad x^2-3x+2=0$;

$x_1=1$, $\quad x_2=2$.

$y(1)=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2=\frac{5}{6}$; $\quad y(2)=\frac{1}{3}2^3-\frac{3}{2}2^2+2\cdot 2=\frac{2}{3}$.

Отже, точки $\left(1;\ \frac{5}{6}\right)$ та $\left(2;\ \frac{2}{3}\right)$ є критичними точками першого роду.

Друга похідна функції $y=f(x)$: $y''(x)=2x-3$.

$y''(1)=2-3=-1$, $\ y''(1)<0$;

$y''(2)=2\cdot 2-3=1$, $\ y''(2)>0$.

Розіб‘ємо критичними точками першого роду x_1 та x_2 область визначення функції $f(x)$ на проміжки та визначимо проміжки зростання і спадання функції, точки екстремуму.

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f''(x)$		-		+	
$f(x)$	$\uparrow$	**max**	$\downarrow$	**min**	$\uparrow$
$f(x)$		$\frac{5}{6}$		$\frac{2}{3}$	

Отже, функція $f(x)$ зростає при $x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$ і спадає при $x\in(1;2)$. Точка $A\left(1;\ \frac{5}{6}\right)$ - точка максимуму, точка $B\left(2;\ \frac{2}{3}\right)$ - точка мінімуму.

Визначимо критичні точки другого роду. Для цього прирівняємо другу похідну функції до нуля.

$y''(x)=0$, $\quad 2x-3=0$;

$x_3 = \frac{3}{2} = 1.5$.

$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} = 0.75$.

Отже, точка $\left(1.5;\ 0.75\right)$ - критична точка другого роду.

Розіб‘ємо критичною точкою другого роду x_3 область визначення функції $f(x)$ на проміжки та визначимо проміжки опуклості і ввігнутості функції, точки перегину.

x	$(-\infty;1.5)$	1,5	$(1.5;+\infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	0,75	$\cup$

Отже, функція $f(x)$ опукла при $x \in (-\infty;1.5)$ і ввігнута при $x \in (1.5;+\infty)$, точка $C(1.5;\quad 0.75)$ - точка перегину.

Асимптоти графіка функції

Асимптота – пряма, до якої необмежено наближається поточна точка графіка функції при її віддаленні у нескінченність (під віддаленні у нескінченність розуміємо віддалення у нескінченність відносно початку координат).

Вертикальні асимптоти

Якщо функція $f(x)$ у точці $x = a$ має нескінченний розрив, то пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою графіка функції. Завжди потрібно визначити поведінку функції зліва і справа від асимптоти, тобто визначити односторонні границі.

Похилі асимптоти

Рівняння похилої асимптоти графіка функції $f(x)$ має вигляд

$y = k \cdot x + b$,

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{1.17}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - k \cdot x\right]. \tag{1.18}$$

Якщо хоча б одна з границь (1.17) і (1.18) не існує, то графік похилих асимптот не має.

Зауваження! При пошуку похилих асимптот доцільно визначити границі (1.17) та (1.18) при $x \to -\infty$ та при $x \to +\infty$, оскільки у ряді випадків границя зліва не рівна границі справа.

Приклад. Визначити асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

Область визначення функції: $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

У точці $x = 0$ функція має нескінченний розрив.

$$\lim_{x \to -0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = +\infty; \qquad \lim_{x \to +0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = -\infty.$$

Отже, пряма $x = 0$ - вертикальна асимптота.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{2x - 1}{x^2} \right) = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - k \cdot x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[x + 2 - \frac{1}{x} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[2 - \frac{1}{x} \right] = 2.$$

Отже, пряма $y_2 = x + 2$ - похила асимптота.

Для дослідження взаємного розміщення графіків функцій $y(x)$ та $y_2(x)$ розглянемо різницю ординат $y(x)$ та $y_2(x)$ при одному і тому ж x.

$$y(x) - y_2(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} - (x + 2) = x + 2 - \frac{1}{x} - x - 2 = -\frac{1}{x}.$$

При $x > 0$ $y(x) - y_2(x) < 0$, тому графік функції $y(x)$ лежить нижче асимптоти.

При $x < 0$ $y(x) - y_2(x) > 0$, тому графік функції $y(x)$ лежить вище асимптоти.

$y = 0.5 * e^{x^2+5};$

$D[0.5\,e^{x^2+5}, x]$

$1.\ e^{5+x^2}\ x$

$\text{Solve}[e^{5+x^2} * x = 0, x]$

$\{\{x \to 0\}\}$

$y = 0.5 * e^{0^2+5}$

74.2066

$y = 0.5 * e^{(-1)^2+5}$

201.714

$y = 0.5 * e^{(1)^2+5}$

201.714

$D[e^{5+x^2}\ x, x]$

$e^{5+x^2} + 2\,e^{5+x^2}\ x^2$

$\text{Solve}[e^{5+x^2} + 2\,e^{5+x^2}\ x^2 = 0, x]$

$\left\{\left\{x \to -\frac{i}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{x \to \frac{i}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$

$N\left[-\frac{i}{\sqrt{2}}\right]$

$0. - 0.707107\,i$

$N\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\right]$

$0. + 0.707107\,i$

3 Завдання:

1) Вказати область визначення функції

2) Визначити парність (непарність) функції

3) Визначити періодичність (неперіодичність) функції

4) Визначити точки перетину графіка функції з осями координат

5) Визначити точки розриву функції

6) Визначити проміжки зростання і спадання функції, критичні точки першого роду

7) Визначити точки екстремуму

8) Визначити інтервали опуклості і ввігнутості, точки перегину графіка функції, критичні точки другого роду

9) Визначити вертикальні та горизонтальні асимптоти графіка функції

10) Побудувати графік функції

Варіанти завдань

Завдання I

1. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$;	2. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$;
3. $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$;	4. $y=\dfrac{2x-1}{3\sqrt{5x-3}}$;
5. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$;	6. $y=\dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2+5}}$;
7. $y=x^2+\dfrac{2}{x}$;	8. $y=\dfrac{x^3}{\left(3-x^2\right)}$;
9. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$;	10. $y=-ln\left(x^2-4x+5\right)$;
11. $y=\dfrac{1}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)}$;	12. $y=3\sqrt[3]{x^2}+2x$;
13. $y=\left(x^3-6x^2+25\right)/5$;	14. $y=2\Big/\left(x^2+x+1\right)$;
15. $y=x+1/x$;	16. $y=x\Big/\left(x^2-1\right)$;
17. $y=e^{2x-x^2}$;	18. $y=\dfrac{x-1}{x^2-4}$;

19. $y=\dfrac{x^2-1}{3(x+1)}$;	20. $y=\dfrac{x^3-5x}{\sqrt{x^2-2}}$;
21. $y=\dfrac{7x^2-1}{\sqrt{x^2-4}}$;	22. $y=\dfrac{x-7}{\sqrt{3x-2}}$;
23. $y=\dfrac{x^3-1}{3x^2-2}$;	24. $y=\dfrac{0{,}9x^2-x}{\sqrt{3x^2-7}}$;
25. $y=0{,}78x^2+\dfrac{0{,}36}{x^3}$;	26. $y=\dfrac{x^3-3x}{\left(7+x^2\right)}$;
27. $y=\dfrac{0{,}9x^2-9}{(7x-1)^2}$;	28. $y=ln\left(3x^2+5\right)$;
29. $y=\dfrac{x}{\left(0{,}9+\sqrt{x+3}\right)}$;	30. $y=0{,}5e^{x^2+5}$;

Завдання №9

Тема: «Знайомство із середовищем MATLAB Simulink».

Мета роботи: ознайомитися з роботою програмного середовища.

1. Теоретичні відомості

Simulink призначений для моделювання пристроїв і систем самого різного характеру. Однак важливе місце займає моделювання в ряді спеціальних областей науки й техніки. До таких областей відноситься електроенергетика.

Пакет розширення **Simpowersystems**

Призначення пакета розширення **Simpowersystems**

Для моделювання енергетичних систем, включаючи пристроїв електротехніки і промислової електроніки, у колишніх версіях MATLAB служив пакет росширення Power System Blockset. У версіях MATLAB 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6 і вище пакет переіменований в Simpowersystems Blockset.

Опис пакета Simpowersystems Blockset у форматі PDF займає близько 650 сторінок. Нижче ми обмежимося набагато більш компактним описом. Доступ до пакета можливий з вікна вьювера бібліотек і показаний на рис. 6.1.

Склад бібліотек Simpowersystems

Blockset

У цей пакет (версії 3 і 4) входять бібліотеки наступного призначення:

- Extra Library – спеціальна розширена бібліотека;
- Application Librares – бібліотека застосувань (новий розділ у версії пакету 4);
- Electrical Sources – джерела електричної енергії й сигналів;
- Elements – лінійні й нелінійні компоненти електротехнічних і електронних пристроїв;
- Machines – електричні машини;
- Measurements – вимірювальні й контрольні пристрої;
- Phasor Element – елемент моделювання трифазних систем;
- Power Electronics – блоки пристроїв енергетичної електроніки;

• Powergui – графічний інтерфейс користувача пакета моделювання енергетичних систем.

Їхнє застосування дозволяє створювати моделі самих різних енергетичних приладів і виконувати їхнє моделювання в режимі роботи віртуальних пристроїв.

Це дає наочна вистава про роботу реальних пристроїв.

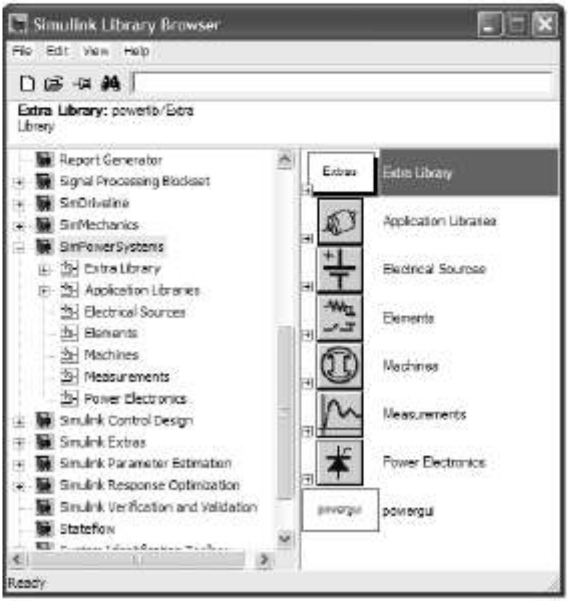


Рисунок 9.1. Доступ до бібліотеки блоків пакета Simpowersystems Blockset

Джерела електричної енергії і їх застосування

Типи джерел електричної енергії

Джерела електричної енергії є первинними компонентами енергетичних систем і пристроїв. Більшість електротехнічних пристроїв є споживачами енергії, що виробляються цими джерелами, або її перетворювачами. Пакет **Power System Blockset** має моделі джерел, що дозволяють імітувати реальні джерела електроенергії. Двічі клацнувши мишею на піктограмі бібліотеки Electrical Sources, можна відкрити вікно цієї бібліотеки (мал. 9.2).

У ньому представлено сім типів джерел електричної енергії:

• AC Current Source – джерело змінного струму;
• AC Voltage Source – джерело змінної напруги;
• DC Voltage Source – джерело постійної напруги;
• Controlled Current Source – регульоване джерело струму;
• Controlled Voltage Source – регульоване джерело напруги;
• Three Phase Programmable Voltage Source – програмувальне джерело
трифазної напруги;
• Three Phase Source – джерело трифазної напруги.

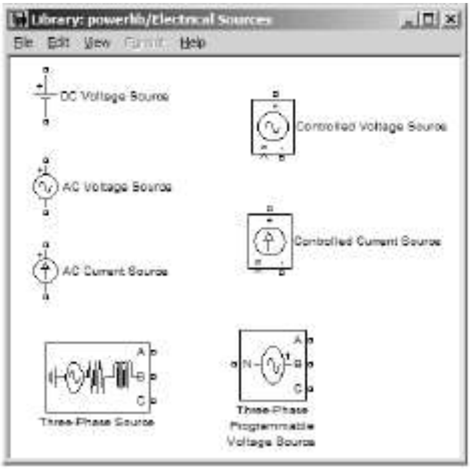


Рисунок 9.2. Вікно бібліотеки джерел Electrical Sources

Ці джерела утворюють функціонально повний набір джерел електричної енергії й мінімальний набір джерел сигналів (в інших розширеннях MATLAB, крім джерел синусоїдальних сигналів, можна задавати велику кількість джерел сигналів самої різної форми). Даних наборів цілком достатньо для проектування енергетичних пристроїв. Призначення й роль перших трьох джерел в особливих коментарях не мають потреби.

Приклад застосування джерела постійного струму

На рис. 9.3 представлені вид блоку й вікно установки параметрів джерела напруги постійного струму **DC Voltage Source**. Основним його параметром є рівень (амплітуда Amplitude) напруги, за замовчуванням рівний 100 В.

Зверніть увагу на список **Measurements** (Інструменти). Він присутній у багатьох інших блоках і служить для створення додаткового виходу для сигнала контролюючий блок. Наприклад, для блоку постійної напруги цей сигнал дає значення напруги джерела. При цьому список дає вибір між Voltage і None (відсутність контролю, параметр, заданий за замовчуванням).

Приклад застосування керованого джерела струму

Кероване джерело струму **Controlled Current Source** задає в зовнішньому колі струм, який залежить від початкового струму й величини керуючого струму. У вікні параметрів цього джерела задається тільки початковий струм (за замовчуванням рівний 0). При цьому тимчасова залежність вихідного струму визначається часовою залежністю керуючого струму. Кероване джерело напруги Controlled Voltage Source задає на затискачах зовнішнього ланцюга напругу, яка залежить від початкової напруги й величини керуючого сигналу. У вікні параметрів цього джерела задається тільки початкова напруга. Керовані джерела напруги й струму дозволяють моделювати такий важливий клас електричних кіл, як параметричні кола (кола, параметри яких залежать від часу).

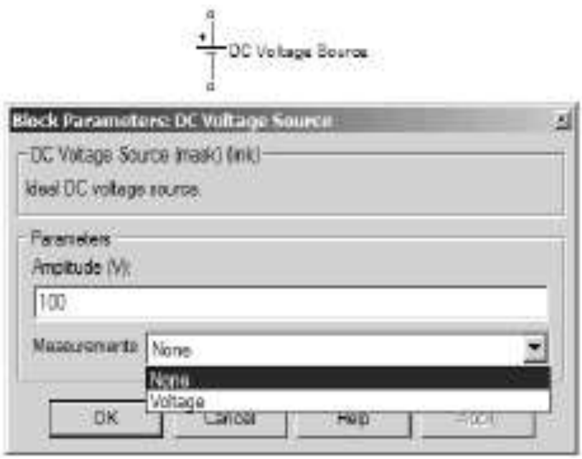


Рисунок 9.3. Джерело постійної напруги
і вікно установки його параметрів

Приклади моделювання Rlc кола

До складу бібліотеки Elements входять дві послідовні й дві паралельні

Rlc кола і їхні трифазні варіанти. Ці ланцюги (послідовна Series RLC

Branch і паралельна Parallel RLC Branch) задаються трьома параметрами: опором R, індуктивністю L і ємністю C. У так званих навантажувальних кіл (послідовної Series RLC Load і паралельної Parallel RLC Load) додатково задаються припустимі потужності розсіювання: активна для резистора й реактивні для індуктивності й конденсатора. Послідовні й паралельніRlc кола можуть використовуватися для моделювання коливальних контурів і створення еквівалентів навантаження.

Для введення окремих елементів (резистора R, конденсатора C і індуктивності L) можна використовувати кожне з Rlc кіл, задавши параметрам значення, що відповідають відсутності непотрібних компонентів, – рис. 9.4. Наприклад, якщо за допомогою послідовної Rlc кола потрібно задати тільки резистор R, те треба задати L = 0 (індуктивність при цьому зникне й буде замінена провідником) і C = inf (inf означає нескінченне значення ємності, що перетворює її також у провідник). Це правило модифікації поширюється й на інші складні компоненти, наприклад у трифазних колах, Rlc кола в моделях ключів (вони будуть описані нижче).

Завдяки цьому правилу число простих моделей у пакеті Simpowersystems Blockset скорочене. Крім того, це правило дозволяє швидко модернізувати окремі кола, наприклад перетворювати резистор R в RL або Rlc коло, не вводячи нових компонентів у вже складену схему, а просто задавши їх у вікні параметрів Rlc кола. При цьому компоненти L і C можуть представляти паразитні індуктивності і ємності резисторів.

Блок **Powergui** забезпечує графічний інтерфейс користувача й контроль над параметрами моделі в цілому.

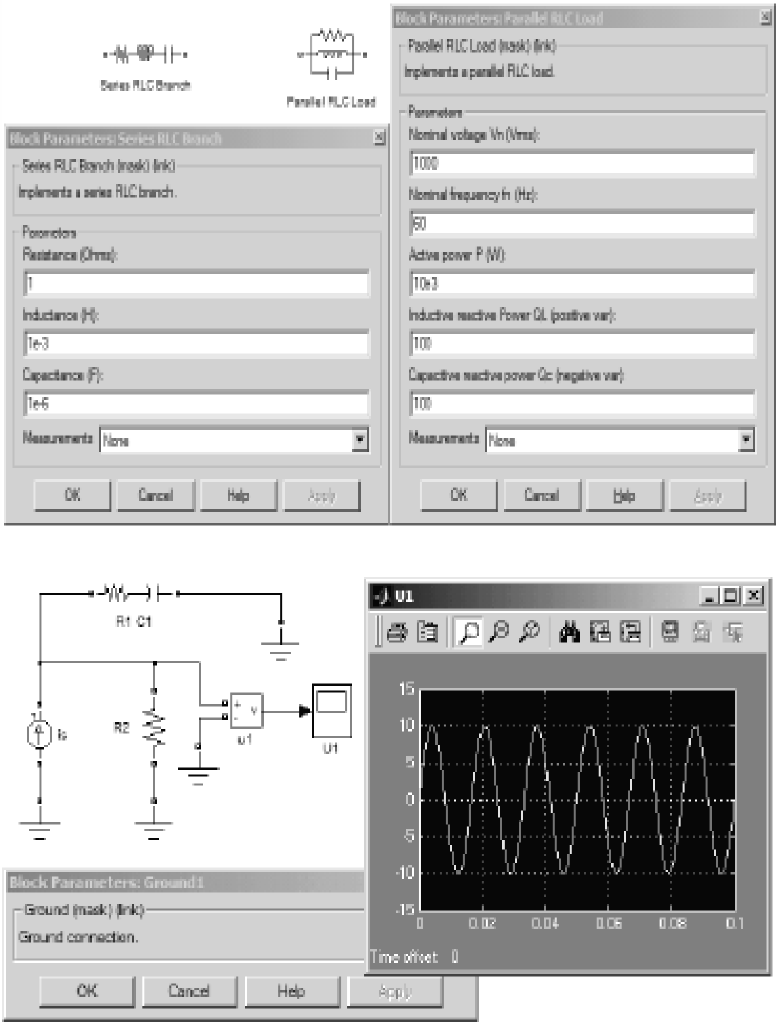


Рисунок 9.4. Приклад моделювання простого кола

Робота із блоком **Powergui**

Бібліотека пакета Simpowersystems Blockset вміщує особливий блок Powergui – див. рис. 9.1. Цей блок не має ні входів, ні виходів і може включатися до складу будь-якої моделі як блок виклику графічного інтерфейсу користувача.

У блок надходять усі дані про модель і результати моделювання. Можливості блоку залежать від моделі, у якій блок використовується. Розглянемо їх на прикладі моделі рис.9.5.

Активізація піктограми Powergui виводить вікно інтерфейсу. Вікно powergui дозволяє контролювати стан змінних моделі в момент ініціалізації й після моделювання. Для цього досить активувати візувати команду Use LTI Viewer на панелі Guii-інтерфейса. В вікні, що з'явилося (на рис. 6.10 воно показане в центрі) треба вибрати змінні, які будуть використані для аналізу. Використовуючи в ньому кнопку Open Ltii-вьювер, можна відкрити вікно Ltii-вьювера, показане на мал. 11.13 ліворуч. У ньому будуються можливі для даної моделі перехідні характеристики по струму й напрузі.

За допомогою блоку можна здійснювати багато корисних операцій. Для цього разом з ним треба використовувати блоки вимірів. Наприклад, якщо використовувати блок Impedance Measurement, те можна одержати графіки модуля імпеданса й фазового зсуву. А застосування блоку Fourier дозволяє виконати швидке перетворення Фур'є й одержати спектрограму.

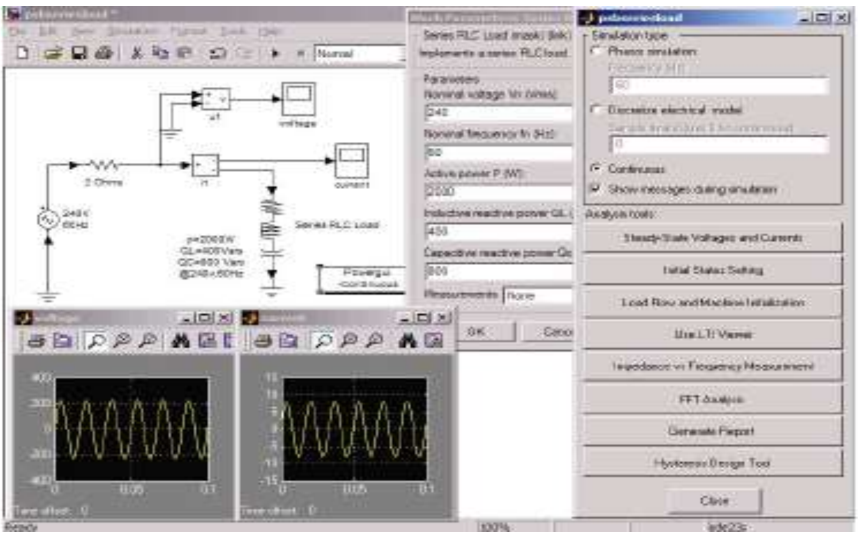


Рисунок 9.5. Приклад моделювання навантажувального послідовного Rlc кола, підключеного до джерела змінної напруги

Рис. 9.6 демонструє одержання характеристик імпедансу для послідовного RLC коливального контуру. На контур подається сума сигналів з частотами 60 і 300 Гц, контур настроєний на п'яту гармоніку сигналу із частотою 60 Гц, створювану джерелом змінного струму Isource. Осциллограми показують тимчасові залежності напруги на контурі й струму через нього. А з допомогою блоку Powergui, перейменованого в Continuous, можна вивести вікно блоку й, активізуючи кнопку Impedance vs Frequence Measurement, построїти частотну характеристику модуля імпедансу і його фази.

Блок Powergui дозволяє також підготувати короткий звіт по моделюванню для поточної моделі. Для цього досить виконати команду Generate Report (Генерація звіту). З'явиться вікно генерації звіту. Установивши потрібні дані для звіту, треба нажати кнопку Generate Report уже в цім вікні.

З'явиться звичайне вікно для запису звіту. Звіт записується у вигляді файлу *.rep.

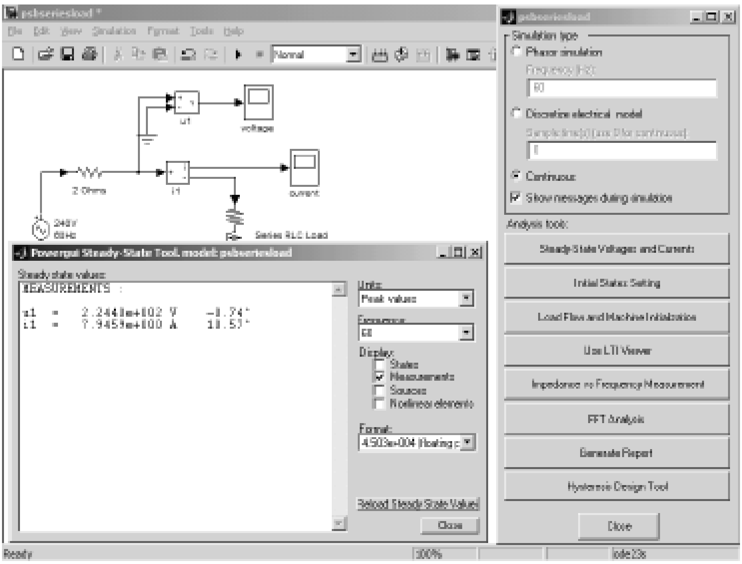


Рисунок 9.6. Контроль стану змінних після моделювання

2 Завдання:

1) в пакеті Simulink скласти схему електричного кола постійного струму (рис.9,7 або рис.9.8).
2) запустити моделювання
3) налаштувати осцилограф і отримати електричні характеристики
4) отримані дані відобразити у звіті

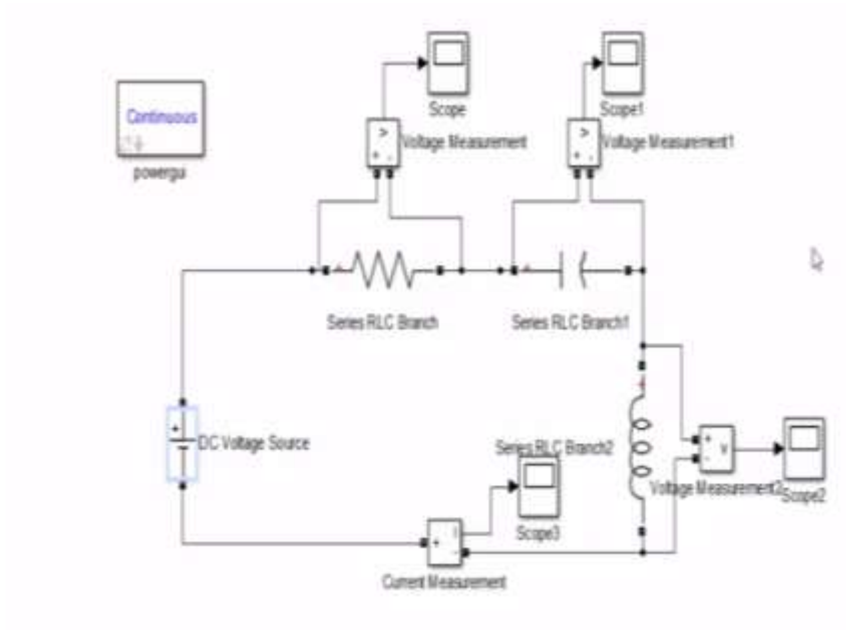


Рисунок 9.7 Версія MATLAB 6.5

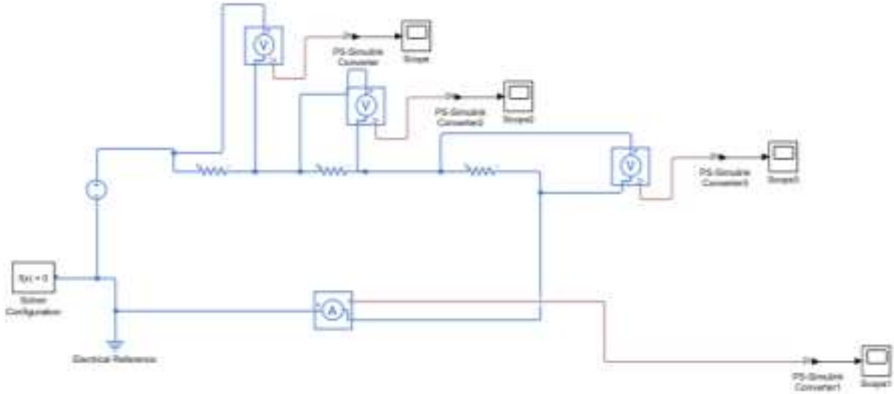


Рисунок 9.8 Версія MATLAB R2020b

Індивідуальні завдання. Виконати моделювання по вихідних даних таблиці.

№ варіанту	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R_1, *Ом*	30	2	15	25	35	40	60	55	55	45
R_2, *ОМ*	80	70	60	50	40	30	75	65	45	55
R_3, *Ом*	20	40	50	45	65	75	15	25	30	55
U	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Завдання №10

Тема: «Моделювання електричного кола змінного струму ».

Мета роботи: ознайомитися з роботою програмного середовища. Навчитися застосовувати моделі змінного струму

1. Теоретичні відомості

Приклади застосування джерела змінного струму

Ідеальне (з нескінченно великим внутрішнім опором) джерело змінного струму із заданою амплітудою, частотою й фазою (AC Current Source) задає струм, який міняється за синусоїдальним законом .

Відповідно, ідеальне (з нульовим внутрішнім опором) джерело змінної напруги із заданою амплітудою, частотою й фазою (AC Voltage Source) задає напругу, що міняється за синусоїдальним законом.

Джерела, що характеризують ці, параметри загальновідомі й задаються в вікнах параметрів.

На рис. 10.1 представлена модель підсумовування на навантаженні сигналів від двох джерел змінної напруги з різними амплітудами й частотами. Сигнал у навантаженні з першого погляду нагадує амплітудно-модульовану синусоїду, але насправді ці типові пульсації – зміна амплітуди двохкомпонентного сигналу з різною частотою. На цьому рисунку показане вікно установки параметрів джерела змінної напруги. Установки в ньому очевидні.

Щоб виміряти напругу на резисторі, використовується блок u tot з бібліотеки вимірювальних блоків Measurements. Ми розглянемо цю бібліотеку небагато пізніше.

Аналогічний представленому на рис. 10.1 результат можна одержати, сумуючи струми від двох джерел змінного струму. Надалі наявність списку й установки загальновідомих параметрів, таких як амплітуда, частота, фаза, опір, ємність або індуктивність, особливо оговорюватися не будуть через їхню очевидність для користувача, знайомого з електротехнікою. Інші користувачі даний пакет застосовувати просто не будуть.

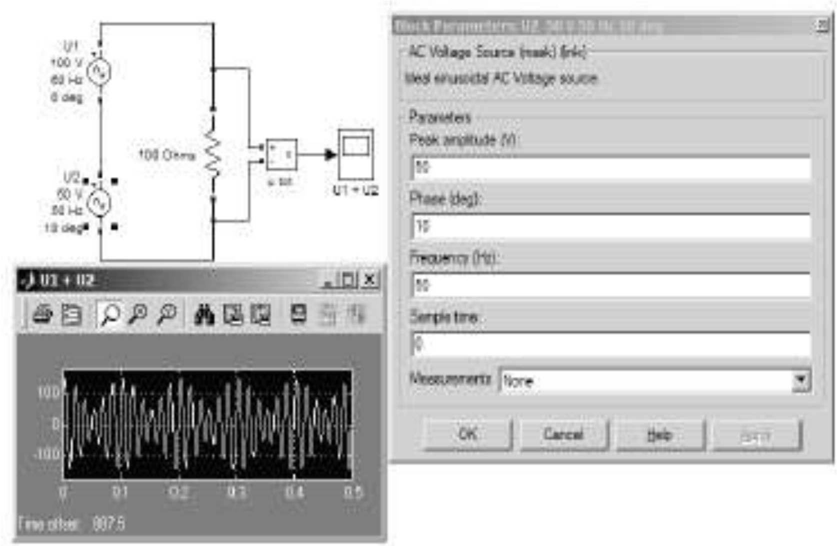


Рисунок 10.1. Модель підсумовування двох джерел змінної напруги і вікно установки параметрів одного із джерел

Основні елементи електротехнічних пристроїв і систем

Бібліотека компонентів **Elements**

Основна бібліотека компонентів (рис. 10.2) містить ряд блоків, що мають досить універсальний характер. За допомогою одного такого блоку можна, як правило, створити блоки декількох простих компонентів і враховувати різні параметри.

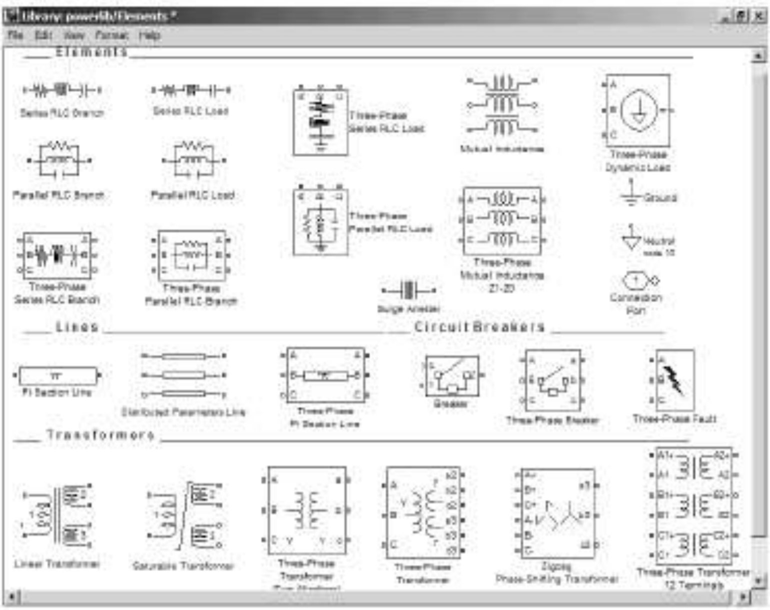


Рисунок 10.2. Вікно бібліотеки компонентів Elements

Ця бібліотека містить **чотири розділи**:

• Elements – елементи електротехнічних пристроїв;

• Lines – лінії передачі;

• Circuis Breakers – вимикачі;

• Transformers – трансформатори.

Розділ Elements містить півтора десятка характерних компонентів електричних пристроїв:

• Series RLC Branch – послідовна Rlc коло;

• Series RLC Load – послідовна Rlc коло із навантаженням;

• Parallel RLC Branch – паралельна Rlc коло;

• Parallel RLC Load – паралельна Rlc коло із навантаженням;

• Threeephase Series RLC Branch – трифазна послідовна Rlc коло;

• Threeephase Series RLC Load – трифазна послідовна Rlc коло с навантаженням;

• Threeephase Parallel RLC Branch – трифазна паралельна Rlc коло;

• Threeephase Parallel RLC Load – трифазна паралельна Rlc коло із навантаженням;

• Mutual Inductance – блок взаємної індуктивності;

• Threeephase Mutual Inductance Z11Z0 – блок взаємної індуктивності

трифазний;

• Threeephase Dynamic Load – трифазне динамічне навантаження;

• Surge Arrester – обмежник пікових напруг;

• Ground – земля;

• Neutral Note 10 – нейтраль;

• Connection port – порт підключення.

Розділ ліній передачі Lines містить наступні блоки:

• PI Section Line – лінія із зосередженими параметрами;

• Distributed Parameters Line – лінія з розподіленими параметрами;

• Threeephase PI Section Line – трифазна лінія із зосередженими параметрами.

У розділі Circuis Breakers є блоки вимикачів:

• Breaker – вимикач керований;

• Threeephase Breaker – трифазний вимикач керований;

• Threeephase Fault – трифазний розрядник (замикач фаз на землю).

Розділ трансформаторів містить такі блоки, як:

• Linear Transformer – лінійний трансформатор;

• Saturable Transformer – нелінійний трансформатор;

• Mutual Inductance – блок взаємної індуктивності однофазний;

• Threeephase Transformer (Three Winding) – трансформатор із трьома обмотками, що мають відводи від їхньої середини;

• Zigzag Phaseesifting Transformer – трифазний фазозсувний трансформатор;

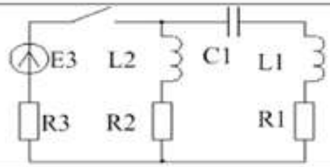
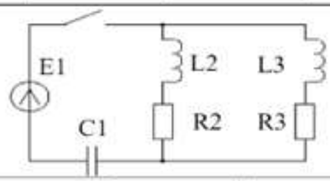
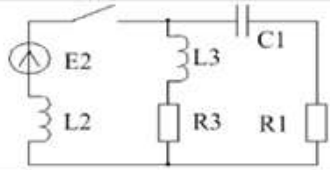
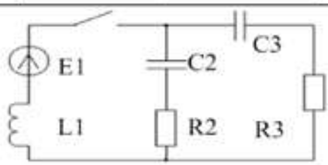
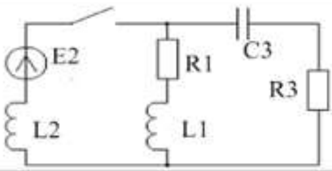
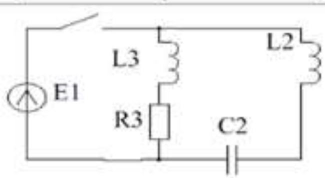
• Threeephase Mutual Inductance – блок взаємної індуктивності трьохфазний;

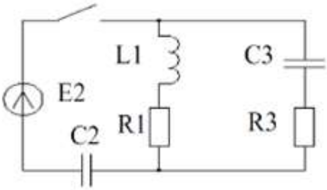
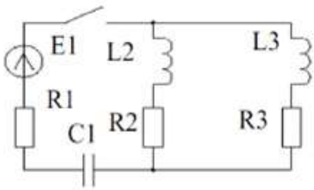
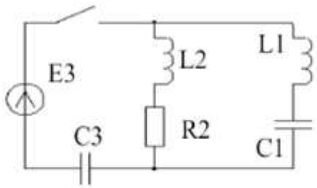
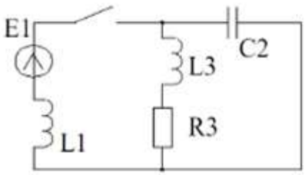
• • Threeephase Transformer 12 Terminal – трифазний блок із трьох однофазних трансформаторів, що має 12 портів.

2 Завдання:

1) згідно з варіантом скласти обране електричне коло в середовищі MATLAB Simulink.

2) за допомогою вимірювальних приладів в середовищі програми визначити струми в вітках і напруги на елементах.

№		
1		C1=10 мкФ, L1=200 мГн, R1=10 Ом, L2=400 мГн, R2=15 Ом, E3=200 В, R3=5 Ом
2		C1=10 мкФ, E1=300 В, L2=400 мГн, R2=10 Ом, L3=500 мГн, R3=20 Ом
3		C1=10 мкФ, R1=20 Ом, L2=300 мГн, E2=250 В, L3=500 мГн, R3=20 Ом
4		E1=220 В, L1=300 мГн, C2=15 мкФ, R2=10 Ом, C3=25 мкФ, R3=5 Ом
5		L1=400 мГн, R1=15 Ом, E2=380 В, L2=300 мГн, C3=20 мкФ, R3=10 Ом
6		E1=130 В, L2=150 мГн, C2=50 мкФ, R3=5 Ом, L3=200 мГн

7		R1=10 Ом, L1=300 мГн, E2=250 В, C2=30 мкФ, R3=5 Ом, C3=20 мкФ
8		E1=350 В, R1=10 Ом, C1=40 мкФ, L2=400 мГн, R2=13 Ом, L3=400 мГн, R3=20 Ом
9		L1=500 мГн, C1=20 мкФ, L2=450 мГн, R2=10 Ом, E3=200 В, C3=50 мкФ
10		E1=300 В, L1=450 мГн, C2=30 мкФ, L3=350 мГн, R3=20 Ом

Завдання №11

Тема: «Моделювання пристроїв з однофазними трансформаторами».

Мета роботи: ознайомитися з роботою програмного середовища. Змоделювати пристрої з однофазними трансформаторами

1. Теоретичні відомості

У пакеті Simpowersystems Blockset є блок лінійного трансформатора. Linear Transformer – рис. 11.1. Він задається індуктивністю Lm і опором втрат у сердечнику Rm первинної обмотки трансформатора, а також оммічними опорами Ri і індуктивностями розсіювання Li усіх обмоток трансформатора (i = 1, 2, 3). Важливо звернути увагу на те, що деякі параметри трансформатора задаються списками, оскільки трансформатор може мати кілька обмоток.

Приклад моделювання системи з лінійним трансформатором даний на рис. 11.2. У моделі використовується блок трьохобмоткового трансформатора з первинною обмоткою, підключеною до джерела змінної напруги. Кожна із двох вторинних обмоток має своє навантаження, є й загальне навантаження. Навантаження до вторинної обмотки відключається вимикачем Breaker, що створює перехідний процес, добре ілюстрований осцилограммами.

При описі параметрів трансформатора використовується додаткова система параметрів, прийнята в індустрії Заходу й називана в описі пакета Pu системою. При цьому вводяться позначення, представлені на рис. 11.3 з прикладами їх розрахунків. Запис позначень тут не цілком коректний, тому що при формальному математичному підході виходить pu = Rbase = Lbase, що є грубою помилкою. Насправді під 1 pu у системі pu-одиниць розуміються різні параметри.

Котушки індуктивності й навіть окремі провідники, розташовані поблизу один одного, мають магнітні поля, що перекриваються, що створює ефект взаємної індуктивності. Для моделювання взаємної індуктивності в пакеті Power System Blockset служить блок взаємної індуктивності **Mutual Inductance** на основі ідеального трансформатора. Він відповідає теоретичній моделі взаємної індуктивності (рис. 11.3) і відрізняється від блоків лінійних трансформаторів тільки системою параметрів.

Приклад моделювання кола із блоком взаємної індуктивності даний на рис. 11.4. На ньому представлені й вікно параметрів такого блоку, і осциллограмми, що ілюструють роботу блока при живленні його від двох джерел синусоїдальної напруги з різними частотами й амплітудами.

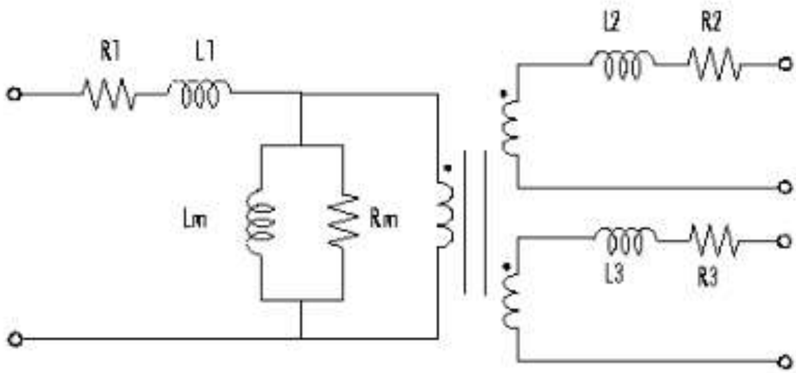


Рис. 11.1. Еквівалентна схема лінійного трансформатора й побудови характеристик його імпедансу

Модель лінійного трансформатора значною мірою ідеалізована. модель нелінійного трансформатора **Saturable Transformer** (рис. 11.5) відрізняється від моделі лінійного трансформатора тим, що індуктивність первинної обмотки Lm замінена на нелінійну індуктивність Lsat

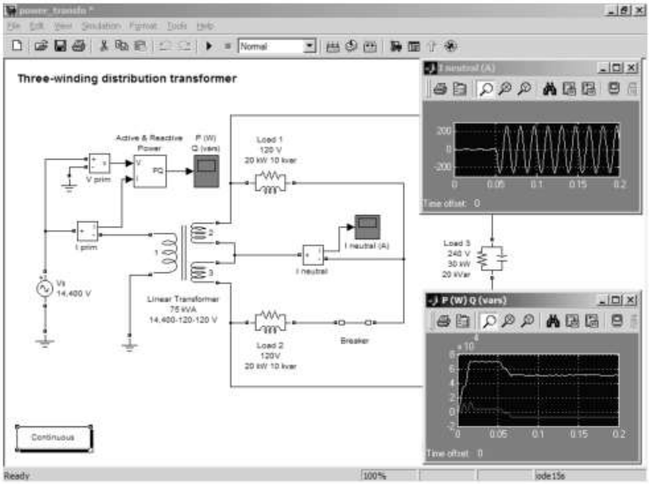


Рисунок 11.2. Приклад моделювання системи з лінійним трансформатором

$$Rbase = 1\,pu = \frac{(Vn)^2}{Pn}$$

$$Lbase = 1\,pu = \frac{Rbase}{2\pi f_n}$$

$$Rbase = \frac{(424.35 \times 10^3)^2}{250 \times 10^6} = 720.3\Omega$$

$$Lbase = \frac{720.3}{2\pi 60} = 1.91H$$

$$R_1 = 0.002pu \times 720.3\Omega = 1.44\Omega$$

$$L_1 = 0.08pu \times 1.91H = 0.1528H$$

$$R_m = 500pu \times 720.3\Omega = 3.6 \times 10^5\Omega$$

Рисунок 11.3. Формули перерахування параметрів Rbase і Lbase для трансформатора

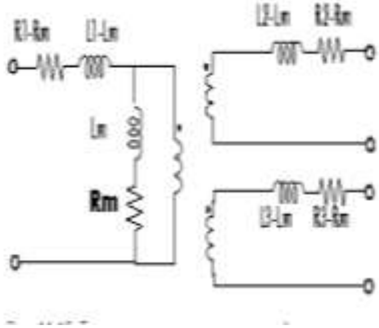


Рисунок 11.4. Теоретична модель взаємної індуктивності

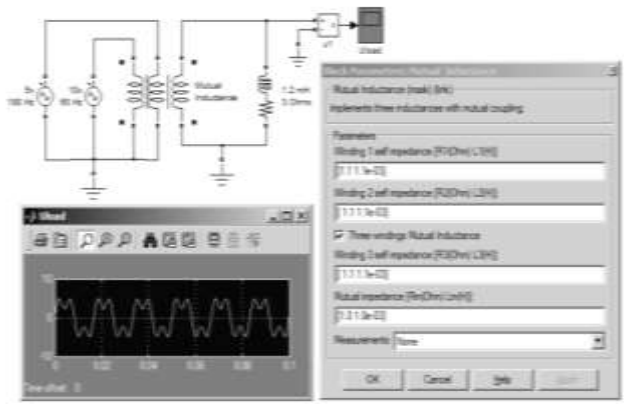


Рисунок 11.5. Приклад моделювання системи із блоком взаємної індуктивності

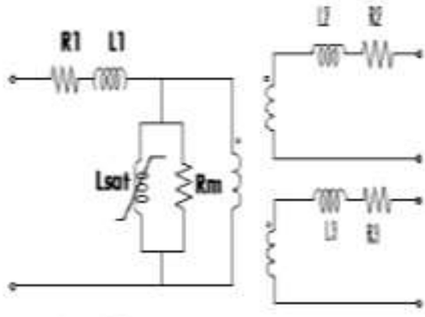


Рисунок 11.6. Модель нелінійного трансформатора

Нелінійність трансформатора враховується залежностями, представленими на рис. 11.6. Допускаються два види цієї залежності, що відрізняються числом опорних точок і поведінкою залежності в області малих струмів.

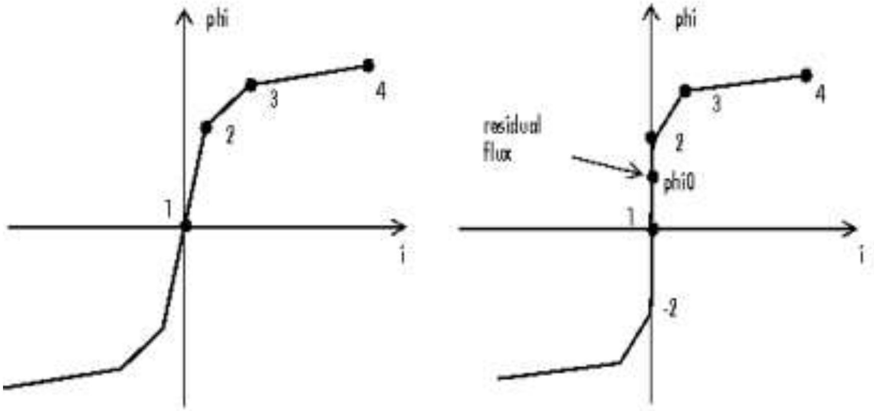


Рисунок 11.7. Моделі нелінійності трансформатора

На рис. 11.8 представлений приклад моделювання однієї фази потужної трансформаторної підстанції з настановною потужністю 1000 Мвт, побудованої на основі нелінійного трансформатора. Там же показані вікно параметрів нелінійного трансформатора й осциллограма вихідної напруги. Моделюється випадок роботи трансформатора на холостому ходу. Зверніть увагу на застосування вимикача **Breaker**, що закривається після двох циклів.

Перехідні процеси в цій моделі можуть бути отримані й за допомогою блоку мультиметра **Multimeter** і віртуального багатоканального осцилографа Scope.

На жаль, ця модель нелінійного трансформатора не враховує гістерезиса намагнічування сердечника й тому є лише першим наближенням до обліку явищ, пов'язаних з нелінійністю трансформатора. Рисунок 11.6 показує модель, у якій заданий гістерезис кривої намагніченості трансформатора. Модель демонструє перехідні процеси в нелінійному трансформаторі, що працює на холостому ходу, при живленні його від джерела змінної напруги через вимикач Breaker.

Побудова петлі гістерезису забезпечується за допомогою блоку графопобудови Fluc – Current characteristic. Для організації контролю над струмами і напругами використовується блок виміру Measurement.

2 Завдання

1. Скласти схему, що на рисунку нижче.

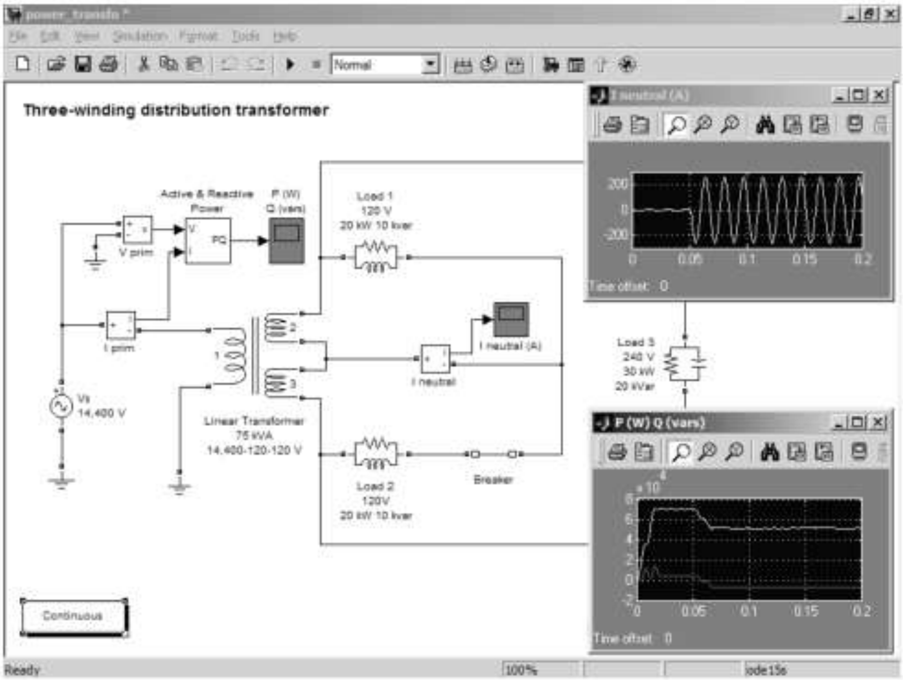


Рисунок 11.8

2. Отримати характеристики.
3. Дані занести у звіт.

ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дьяконов В. П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления. М.: ДМК - Пресс , 2008. 576 с.
2. Дьяконов В. П. Simulink 5/6/7: Самоучитель. М. : ДМК – Пресс, 2008. 784 с.
3. Дьяконов В. П. MATLAB. Полный самоучитель. М.: ДМК – Пресс, 2012. 768 с.
4. Методичні вказівки до лабораторних занять з дисципліни «Основи електротехніки та електроніки» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 144 «Теплоенергетика» денної форми навчання / Кулик Н. І., Аврука І. С., Шабловська А. Р. Рівне : НУВГП, 2019. 80 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/15107/ (дата звернення 08.10.2020).
5. Василець, С. В., Рудик, А. В., Давиденко, В. А., Давиденко, Н. В., Кулик, Н. І., Літковець, С. П., Мельник, Р. І. (2020) Освітньо-професійна програма «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» першого рівня вищої освіти за спеціальністю № 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка галузі знань № 14 Електрична інженерія. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/18634/ (дата звернення 08.10.2020).
6. Давиденко, В. А., Василець, С. В., Рудик, А. В., Давиденко, Н. В., Кулик, Н. І., Літковець, С. П. (2019) Освітньо-професійна програма «Smart-енергетика та електромобільність» першого рівня вищої освіти за спеціальністю № 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка галузі знань № 14 Електрична інженерія. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/17086/ (дата звернення 08.10.2020).

ДОДАТКИ

Додаток А

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки
Кафедра автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій

ЗВІТ З НАВЧАЛЬНО-ТЕХНОЛОГІЧНОЇ ПРАКТИКИ

Виконав:
студент___________________
(прізвище, ініціали)
Група:
____
Перевірив:
____
(вчене звання, прізвище, ініціали)

М.П.

Рівне-20__